TD 6 – Entropie

Margot Catinaud margot.catinaud@lmf.cnrs.fr
Valentin Dardilhac valentin.dardilhac87@gmail.com

I Échauffement

Question 1 *Considérons une pièce biaisée de probabilité $0 < p < 1$ de tomber sur pile (on ne connaît pas la probabilité p). Comment peut-on simuler une pièce parfaite en utilisant la pièce biaisée ? Combien de lancés sont-ils nécessaires en moyenne pour cette simulation ?*

Question 2 *Dans cette question, on suppose que l'on possède une pièce parfaite (*i.e. *lorsque $p = 1/2$).*

1. *Comment peut-on simuler un dé à $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, faces ?*
2. *Quel est le temps moyen d'exécution ?*
3. *Peut-on réaliser cette simulation en temps borné ?*

II Entropie

Question 3 *Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{X}$ une variable aléatoire sur un domaine fini Ω et à valeurs dans un ensemble $\mathbb{X}$ que l'on précisera. Quelle est, en général, la relation d'inégalité entre $\mathcal{H}(X)$ et $\mathcal{H}(Y)$ lorsque*

1. $Y = 2^X$;
2. $Y = \cos(X)$.

Question 4 *Quelle est la valeur minimale de l'entropie $\mathcal{H}(p_1, \dots, p_n) \stackrel{def}{=} \mathcal{H}(\mathbf{p})$ pour $\mathbf{p} \in [0,1]^n$ dans l'ensemble des vecteurs de probabilité de dimension n ? Donner tous les vecteurs $\mathbf{p}$ réalisant ce minimum,* i.e. *calculer l'ensemble*

$$\arg\min_{\mathbf{p}\in[0,1]^n} \mathcal{H}(\mathbf{p}).$$

Question 5 *On lance une pièce parfaite jusqu'à obtenir face. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués.*

1. *Calculer l'entropie $\mathcal{H}(X)$.*
2. *On tire au hasard une variable aléatoire X selon cette distribution. Trouver une séquence efficace de requêtes oui/non de la forme "est-ce que X est dans l'ensemble S ?" pour déterminer X.*
3. *Comparer $\mathcal{H}(X)$ avec l'espérance du nombre de requêtes nécessaires pour trouver X.*

Question 6 Dans le cadre des InterENS Culturelles 2017, une série de 7 matchs d'improvisation est organisée entre les équipes de Paris-Saclay et de Rennes. La première équipe à remporter 4 matchs est déclarée gagnante. Soit X la variable aléatoire représentant les résultats possibles, par exemple SSSS, RSRSRSR ou SSSRRRR. Soit Y le nombre de matchs joués ($4 \leqslant Y \leqslant 7$). On suppose les équipes équilibrées, et les matchs indépendants. *Calculer $\mathcal{H}(X)$, $\mathcal{H}(Y)$, $\mathcal{H}(Y|X)$ et $\mathcal{H}(X|Y)$.*

III Entropie dans les arbres

Définition 1 : Arbre probabiliste

On appelle *arbre probabiliste* un arbre fini d'arité $m \in \mathbb{N}$ dont les noeuds internes et les feuilles sont étiquetées par des probabilités telles que

(i) La probabilité de la racine vaut 1 ;

(ii) La probabilité d'un noeud interne est la somme des probabilités de ses enfants.

On note :

- $P_1, \ldots, P_N$ les probabilités des N noeuds internes (P_1 étant la racine) ;
- $p_1, \ldots, p_n$ les probabilités des n feuilles ;
- $q_{l,j}$ la probabilité du j-ème fils du l-ème noeud interne, ainsi on a :

$$\forall\, l \in [\![1; N]\!],\ P_l = \sum_{j=1}^{s_l} q_{l,j}.$$

Question 7 *Soit $F \in [\![1; n]\!]$ une variable aléatoire suivant la loi définie par les $p_1, \ldots, p_n$ et L la profondeur de la F-ème feuille. Montrer que l'on a*

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{i=1}^{N} P_i.$$

Question 8 *Soit $W \in [\![1; N]\!]^*$ la suite des noeuds internes aboutissant à la feuille F et $B \in [\![1; m]\!]^*$ la suite des branchements correspondants (ainsi $W[i+1]$ est le $B[i]$-ème enfant du noeud $W[i]$). Soit l un noeud interne de profondeur i. Exprimer $H_l \overset{def}{=} \mathcal{H}\big(B[i] = j \mid W[i] = l\big)$ en fonction des $q_{l,j}$ et de P_l.*

Question 9 *Montrer l'égalité suivante :*

$$\mathcal{H}(F) = \sum_{l=1}^{N} P_l H_l.$$

Question 10 *Soit un algorithme probabiliste effectuant L tirages indépendants de même distribution μ, et dont le résultat est modélisé par la variable aléatoire Y. Monter que l'on a $\mathcal{H}(Y) \leqslant \mathcal{H}(\mu) \cdot \mathbb{E}(L)$.*