TD 12 – Programmation linéaire avec matrices totalement unimodulaires

Margot Catinaud margot.catinaud@lmf.cnrs.fr
Valentin Dardilhac valentin.dardilhac87@gmail.com

Une matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ de dimensions $n, m \in \mathbb{N}^*$, est dite *totalement unimodulaire* lorsque le déterminant de toute matrice carrée extraite de $\mathbf{M}$ appartient à $\{-1, 0, 1\}$.

Question 1 *Que peut-on dire du problème de programmation linéaire standard suivant :*

Problème 1 : Problème de minimisation
minimiser la valeur $\langle \mathbf{c} \mid \mathbf{x} \rangle$ **pour** $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ **telle que** $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \ \wedge \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ **avec** $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$ **et** $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^n$.

lorsque la matrice $\mathbf{M}$ *est totalement unimodulaire ?*

Dans la suite, on considère une matrice $\mathbf{M}$ telle que tout coefficient de $\mathbf{M}$ appartient à $\{-1, 0, 1\}$ et *toute colonne a au plus deux coefficents non nuls*. On note $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{J}$) l'ensemble des indices de lignes (resp. de colonnes) de la matrice $\mathbf{M}$. L'objectif du problème est d'établir deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathbf{M}$ soit totalement unimodulaire et de concevoir un algorithme de complexité polynomiale pour le test d'unimodularité totale d'une matrice. Une partition $\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}' \sqcup \mathcal{I}''$ (avec $\mathcal{I}'$ ou $\mathcal{I}''$ éventuellement vide) est dite *admissible* lorsque, pour tout couples d'indices $(i_1, i_2) \in \mathcal{I}^2$ avec $i_1 \neq i_2$, la partition vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\exists j \in \mathcal{J},\ \mathbf{M}_{i_1,j} = \mathbf{M}_{i_2,j} \neq 0 \implies \Big[i_1 \in \mathcal{I}' \iff i_2 \in \mathcal{I}'' \Big]$;

(ii) $\exists j \in \mathcal{J},\ \mathbf{M}_{i_1,j} = -\mathbf{M}_{i_2,j} \neq 0 \implies \Big[i_1 \in \mathcal{I}' \iff i_2 \in \mathcal{I}' \Big]$.

I Première partie

Dans cette partie, on suppose qu'il existe une partition admissible $(\mathcal{I}', \mathcal{I}'')$ de $\mathcal{I}$. Soit $\mathbf{M}^{(\varphi)}$ une matrice carrée extraite de $\mathbf{M}$ et $\mathcal{I}_{(\varphi)}$ le sous-ensemble d'indices des lignes de $\mathbf{M}$ présentes dans $\mathbf{M}^{(\varphi)}$.

Question 2 *On suppose d'abord que toute colonne de* $\mathbf{M}^{(\varphi)}$ *a deux coefficients non nuls. Trouver une combinaison linéaire non nulle* $(\lambda_i)_{i\in\mathcal{I}_{(\varphi)}}$ *des lignes de* $\mathbf{M}^{(\varphi)}$ *telles que*

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_{(\varphi)}} \lambda_i \mathbf{M}^{(\varphi)}_{i,\cdot} = \mathbf{0}^T.$$

Question 3 *Montrer que* $\det(\mathbf{M}^{(\varphi)}) \in \{-1, 0, 1\}$ *par récurrence sur la dimension de* $\mathbf{M}^{(\varphi)}$*. On distinguera le cas où il existe une colonne de* $\mathbf{M}^{(\varphi)}$ *avec moins de deux coefficients non nuls et celui où toutes les colonnes de* $\mathbf{M}^{(\varphi)}$ *ont deux coefficients non nuls.*

On considère un graphe orienté pondéré connexe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \omega)$, où $\omega : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est la fonction de poids de $\mathcal{G}$, avec deux sommets distingués s et t tels que s n'a pas de prédecesseur et t n'a pas de successeur [1]. On considère de plus le problème suivant, noté **LP**, dont les variables sont indicées par les sommets $\{x_i\}_{i\in\mathcal{V}}$ et les arcs $\{x_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathcal{E}}$ de $\mathcal{G}$:

1. *i.e.* $\mathsf{Card}\big(\{u \in \mathcal{V} \mid (u, s) \in \mathcal{E}\}\big) = 0$ et $\mathsf{Card}\big(\{v \in \mathcal{V} \mid (t, v) \in \mathcal{E}\}\big) = 0$.

Problème 2 : Problème **LP** de minimisation

$$\textbf{minimiser la valeur} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} \omega(i,j)\, x_{i,j} \textbf{ pour } \{x_i\}_{i\in\mathcal{V}} \textbf{ et } \{x_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathcal{E}}$$

$$\textbf{telle que} \begin{cases} (i) & \forall\,(i,j)\in\mathcal{E},\ x_{i,j} - x_i + x_j \geqslant 0 \\ (ii) & x_s - x_t \geqslant 1 \\ (iii) & \Big(\forall\,(i,j)\in\mathcal{E},\ x_{i,j}\geqslant 0\Big) \textbf{ et } \Big(\forall\, i\in\mathcal{V},\ x_i \geqslant 0\Big). \end{cases}$$

Question 4 *Démontrer que ce problème admet une solution.*

Question 5 *Démontrer qu'il existe une solution optimale qui vérifie*

$$\forall\, i\in\mathcal{V},\ x_s \geqslant x_i \geqslant x_t \quad \textit{et} \quad \forall\,(i,j)\in\mathcal{E},\ x_{i,j} = \max(x_i - x_j, 0).$$

Question 6 *Démontrer qu'il existe une solution optimale **à valeurs entières** qui vérifie*

$$\forall\, i\in\mathcal{V},\ 1 = x_s \geqslant x_i \geqslant x_t = 0 \quad \textit{et} \quad \forall\,(i,j)\in\mathcal{E},\ x_{i,j} = \max(x_i - x_j, 0).$$

À quel problème de graphe cette solution optimale fournit-elle une réponse ? On justifiera la réponse.

Question 7 *Calculer le dual de* **LP***. Démontrer que ce dual est équivalent au problème du flot maximal de s vers t dans lequel ω est interprété comme la capacité du canal. Que peut-on conclure du théorème de la dualité forte ?*

II Deuxième partie

On définit les relations binaires (symétriques) entre les éléments de $\mathcal{I}$ (*i.e.* les indices de lignes de la matrice $\mathbf{M}$) suivantes :

- $\bowtie$ est définie par : $\forall\, i, i' \in \mathcal{I},\ i \bowtie i' \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, j\in\mathcal{J},\ \mathbf{M}_{i,j} = -\mathbf{M}_{i',j} \neq 0\,;$
- $\bowtie^*$ est la cloture réflexive et transitive de $\bowtie$. On note les classes d'équivalence de $\bowtie^*$ par $\mathcal{C} \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{I}_k\}_{k=1}^{p}$;
- $\sim$ est définie par : $\forall\, i, i' \in \mathcal{I},\ i \sim i' \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, j\in\mathcal{J},\ \mathbf{M}_{i,j} = \mathbf{M}_{i',j} \neq 0.$

De plus, on définit la relation binaire $\approx$ entre les classes d'équivalence $\mathcal{C}$ comme suit :

$$\forall\, \mathcal{I}_k, \mathcal{I}_{k'} \in \mathcal{C},\ \mathcal{I}_k \approx \mathcal{I}_{k'} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, i\in\mathcal{I}_k,\ \exists\, i'\in\mathcal{I}_{k'},\ i \sim i'.$$

Ces relations binaires sont illustrées sur la figure 1.

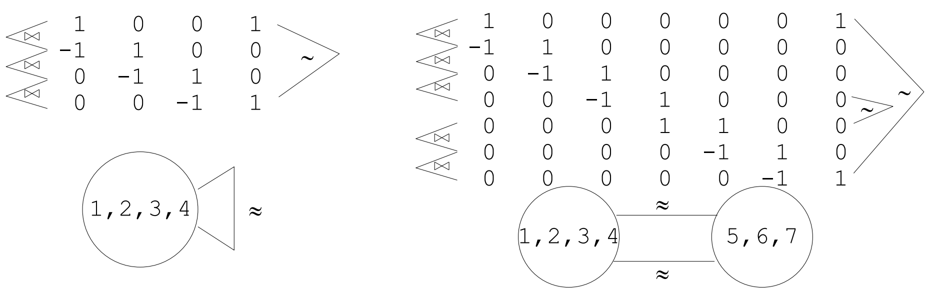

FIGURE 1 – Deux matrices et les relations $\bowtie, \sim, \approx$ associées

Question 8 *Calculer les déterminants des deux matrices de la figure 1.*

Soit α une injection de $[\![1;S]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$. Soient des sous-ensembles de lignes $\mathcal{I}'_{\alpha(s)} \overset{\text{def}}{=} \left\{i_k^{(s)}\right\}_{k=1}^{r_s}$ pour $s\in[\![1;S]\!]$ telles que

- $\forall\, s \in [\![1; S]\!],\ \mathcal{I}'_{\alpha(s)} \subseteq \mathcal{I}_{\alpha(s)}$;
- $\forall\, s \in [\![1; S]\!],\ \forall\, k \in [\![1; r_s - 1]\!],\ i_k^{(s)} \bowtie i_{k+1}^{(s)}$. On supposera sans perte de généralité, *i.e.* en multipliant éventuellement la colonne $j_k^{(s)}$ par -1, que :

$$\exists\, j_k^{(s)} \in \mathcal{J},\ \mathbf{M}_{i_k^{(s)}, j_k^{(s)}} = 1 \wedge \mathbf{M}_{i_{k+1}^{(s)}, j_k^{(s)}} = -1.$$

- $\forall\, s \in [\![1; S-1]\!],\ i_{r_s}^{(s)} \sim i_1^{(s+1)}$. On supposera sans perte de généralité, *i.e.* en multipliant éventuellement la colonne $j_{r_s}^{(s)}$ par -1, que :

$$\exists\, j_{r_S}^{(S)} \in \mathcal{J},\ \mathbf{M}_{i_{r_S}^{(S)}, j_{r_S}^{(S)}} = 1 \wedge \mathbf{M}_{i_1^{(1)}, j_{r_S}^{(S)}} = 1.$$

La matrice carrée extraite $\mathbf{M}^{(\alpha)}$, lignes $\mathcal{I}'_{\alpha(s)}$ et colonnes $\left\{ j_p^{(s)} \right\}_{p=1}^{r_s}$ pour tout $s \in [\![1; S]\!]$, est représentée sur la figure 2.

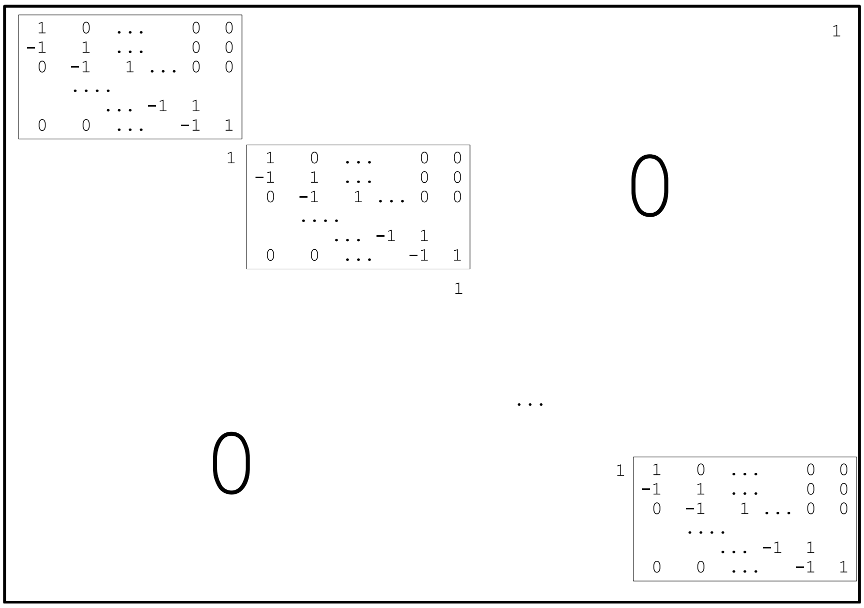

Figure 2 – Une matrice carrée extraite

Question 9 *Calculer le déterminant de la matrice extraite* $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ *en fonction de la parité de* S.

Question 10 *En déduire que lorsqu'il existe un cycle élémentaire de longueur impaire dans le graphe de la relation* $\approx$*, alors la matrice* $\mathbf{M}$ *n'est pas totalement unimodulaire.*

On dit qu'un graphe non orienté est *biparti* lorsqu'il existe (au moins) une partition de ses sommets $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \sqcup \mathcal{V}_2$ (union disjointe), avec $\mathcal{V}_1$ ou $\mathcal{V}_2$ éventuellement vide, telle que toute arête joint un sommet de $\mathcal{V}_1$ à un sommet de $\mathcal{V}_2$:

$$\forall\, s, t \in \mathcal{V},\ \{s, t\} \in \mathcal{E} \implies \left[s \in \mathcal{V}_1 \ \wedge\ t \in \mathcal{V}_2 \right].$$

Question 11 *Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il n'existe pas de cycle élémentaire*[2] *de longueur impaire. Pour établir la condition suffisante, on proposera un algorithme qui construit une partition des sommets ou détecte l'existence d'un tel cycle. On donnera la complexité de cet algorithme.*

Devoir maison 12 *En se servant des questions précédentes, montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) $\mathbf{M}$ *est totalement unimodulaire ;*
(b) $\mathcal{I}$ *admet une partition admissible ;*
(c) Le graphe de la relation $\approx$ *est biparti.*

2. *i.e.* lorsque le chemin ne passe pas deux fois par le même sommet. Ainsi un cycle élémentaire ne contient pas de cycle strictement plus petit.