TD 13 – Recherche de chemins dans un graphe

Margot Catinaud margot.catinaud@lmf.cnrs.fr
Valentin Dardilhac valentin.dardilhac87@gmail.com

On considère $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe non orienté à $n \in \mathbb{N}^*$ sommets ($\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} [\![1;n]\!]$) et $m \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{Card}(\mathcal{E}) \in \mathbb{N}^*$ arêtes. Par définition, les graphes de ce problème n'ont pas de boucle : une arête relie des sommets distincts. De plus, on les suppose connexes. On note $\mathbf{M}^{(\mathcal{G})} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ la *matrice (symétrique) d'adjacence* de $\mathcal{G}$:

$$\forall\, i,j \in [\![1;n]\!],\ \mathbf{M}^{(\mathcal{G})}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{\mathcal{E}}\big(\{i,j\}\big) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \textbf{lorsque } \{i,j\} \in \mathcal{E}; \\ 0 & \textbf{sinon}. \end{cases}$$

Soit $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (i_l)_{l=0}^{p}$ un chemin dans $\mathcal{G}$. La *longueur* du chemin Γ est donnée par $\lambda_{\mathcal{G}}\big(\Gamma\big) \stackrel{\text{def}}{=} p \in \mathbb{N}$. On note $\big(i \rightsquigarrow^*_{\mathcal{G}} j\big)$ l'ensemble des chemins entre un sommet $i \in [\![1;n]\!]$ et un sommet $j \in [\![1;n]\!]$ dans $\mathcal{G}$. La *distance* entre deux sommets $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$ dans $\mathcal{G}$ est notée $\delta_{\mathcal{G}}\big[i\,;\,j\big]$ et est égale à la plus petite longueur d'un chemin reliant i à j :

$$\delta_{\mathcal{G}}\big[i\,;\,j\big] \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\Gamma \in \left(i \rightsquigarrow^*_{\mathcal{G}} j\right)} \lambda_{\mathcal{G}}\big(\Gamma\big) \in \mathbb{N}.$$

Un sommet $j \in [\![1;n]\!]$ relié par une seule arête à $i \in [\![1;n]\!]$ est qualifié de *voisin de i*. On note $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i)$ l'ensemble des voisins de i dans $\mathcal{G}$:

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!],\ \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ j \in [\![1;n]\!] \ \Big|\ \{i,j\} \in \mathcal{E} \Big\} \subseteq \mathcal{V}.$$

Enfin on note $\mathsf{deg}_{\mathcal{G}}(i) = \mathsf{Card}\big(\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i)\big)$ le *degré dans $\mathcal{G}$* du sommet $i \in [\![1;n]\!]$.

I Première partie

Pour un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ fixé, on définit le graphe $\mathcal{G}^* = (\mathcal{V}^*, \mathcal{E}^*)$ par $\mathcal{V}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} [\![1;n]\!]$ et :

$$\forall\, i,j \in [\![1;n]\!],\ \{i,j\} \in \mathcal{E}^* \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists\, \Gamma \in \big(i \rightsquigarrow^*_{\mathcal{G}} j\big),\ \lambda_{\mathcal{G}}\big(\Gamma\big) \in \{1,2\}.$$

On note par $\mathbf{M}^{(\mathcal{G}^*)}$ (resp. $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}$) la matrice d'adjacence (resp. de distance) de $\mathcal{G}^*$.

Question 1 *Écrire un algorithme de complexité en temps quadratique,* i.e. *en* $\Theta(n^2)$*, qui prend en entrée les matrices* $\mathbf{M}^{(\mathcal{G})}$ *et* $\big(\mathbf{M}^{(\mathcal{G})}\big)^2$ *et qui retourne la matrice* $\mathbf{M}^{(\mathcal{G}^*)}$.

Question 2 *Dans cette question, on suppose que $\mathcal{G}^*$ est complet. Écrire un algorithme de complexité en temps quadratique qui prend en entrée la matrice* $\mathbf{M}^{(\mathcal{G})}$ *et qui retourne la matrice* $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}$.

Question 3 *Soient $i,j \in [\![1;n]\!]$. Exprimer $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j}$ en fonction de $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{i,j}$ selon la parité de $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j}$.*

Question 4 *Soient $i,j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$. Démontrer que :*

(a) $\forall\, v \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i),\ \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j} - 1 \leqslant \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{v,j} \leqslant \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j} + 1$ *;*

(b) $\exists\, v_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i),\ \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{v_i,j} = \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j} - 1.$

Question 5 *Soient $i,j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$. Démontrer que :*

(a) Lorsque $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j}$ est pair, alors on a :

$$\forall\, v \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i),\ \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{v,j} \geqslant \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{i,j}.$$

(b) Lorsque $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j}$ est impair, alors on a :

$$\forall\, v \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i),\ \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{v,j} \leqslant \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{i,j}.$$

De plus, il existe un voisin $v_i \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i)$ tel que $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{v,j} < \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{i,j}$.

Question 6 *Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$. Démontrer la propriété suivante :*

$$\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j} \text{ est pair} \iff \sum_{v \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i)} \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{v,j} \geqslant \mathsf{deg}_{\mathcal{G}}(i) \cdot \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G}^*)}_{i,j}.$$

On rappelle que l'algorithme standard (resp. de *Strassen*, de *Coppersmith-Winograd*) de multiplication de matrices carrées de dimension $n \times n$ effectue $\Theta(n^3)$ (resp. $\Theta(n^{2.807})$, $\Theta(n^{2.376})$) opérations arithmétiques. Dans toute la suite, on suppose disposer d'un algorithme opérant en $\Theta(n^{2+\varepsilon})$ avec $0 < \varepsilon < 1$.

Question 7 *En utilisant les questions précédentes, développer un algorithme récursif qui calcule la matrice $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}$ en effectuant $\Theta(n^{2+\varepsilon}\log n)$ opérations arithmétiques.*

II Deuxième partie

On appelle *matrice booléenne* toute matrice à coefficents dans $\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1\}$. On rappelle que $\mathbb{B}$ est un corps pour les opérations $\oplus$ (le *xor*) et $\odot$ (la multiplication usuelle). Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ deux matrices booléennes et $\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ leur produit. Pour $i, j \in [\![1;n]\!]$ deux indices, on appelle *témoin* du booléen $\mathbf{P}_{i,j} \in \mathbb{B}$ un indice $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $\mathbf{A}_{i,k} = \mathbf{B}_{k,j} = 1$. Une matrice $\mathbf{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est une *matrice témoin* du produit $\mathbf{P}$ lorsque

- $\mathbf{W}$ est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$;
- $\forall\, i, j \in [\![1;n]\!],\ \mathbf{W}_{i,j} = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbf{P}_{i,j} = 0$;
- Pour tout $i, j \in [\![1;n]\!]$, $\mathbf{W}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} k > 0$ lorsque $k \in [\![1;n]\!]$ est un témoin de $\mathbf{P}_{i,j}$.

Soit $\mathcal{R} \subseteq [\![1;n]\!]$ une partie. On définit la matrice *entière* $\mathbf{A}^{(\mathcal{R})}$ par :

$$\forall\, i, j \in [\![1;n]\!],\ \mathbf{A}^{(\mathcal{R})}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} j\mathbf{A}_{i,j} & \textbf{lorsque } j \in \mathcal{R} \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

Question 8 *Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ tels que $\mathbf{P}_{i,j}$ admette un unique témoin $k \in [\![1;n]\!]$ dans $\mathcal{R}$. Montrer que l'on a $\left(\mathbf{A}^{(\mathcal{R})}\mathbf{B}\right)_{i,j} = k$.*

Question 9 Soit une urne $\mathcal{U}^{(b)}_n$ de $n \in \mathbb{N}^*$ boules dont $b \in [\![1;n]\!]$ sont des boules blanches et $n-b$ sont noires. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{n}{2} \leqslant rb \leqslant n$. Supposons que l'on tire sans remise r boules. On considère $\mathcal{B}^{(r)}_b : [\![1;r]\!] \longrightarrow [\![0;b]\!]$ la variable aléatoire modélisant le nombre de boules blanches que l'on a tiré après chaque tirage. *Montrer que l'on a :*

$$\mathbb{P}\mathsf{r}\Big(\mathcal{B}^{(r)}_b(r) = 1\Big) = \frac{rb}{n}\left(\prod_{j=0}^{r-2}\frac{n-b-j}{n-1-j}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{r-1} \geqslant \frac{1}{2e}.$$

Question 10 *Montrer que l'algorithme 1 vérifie les propriétés suivantes :*

(1) L'algorithme retourne bien une matrice témoin ;

(2) L'algorithme effectue en moyenne $\Theta(n^{2+\varepsilon}\log^2 n)$ opérations arithmétiques[1].

1. On pourra admettre l'inégalité suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{2e}\right)^{4\log n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Algorithme 1 : Un algorithme pour le calcul de la matrice témoin d'un produit matriciel.

fun calcul_temoin $(\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}))$ $(\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B}))$ =
  $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$; $\mathbf{W} \leftarrow -\mathbf{P}$;
  pour $i = 0$ **à** $\lfloor \log n \rfloor$ **faire**
    $r \leftarrow 2^i$;
    pour $j = 1$ **à** $16\lceil \log n \rceil$ **faire**
      choisir $\mathcal{R} \xleftarrow{\$} \mathcal{P}(\llbracket 1;n \rrbracket)$ **avec** $\mathsf{Card}(\mathcal{R}) = r$;
      calculer $\mathbf{A}^{(\mathcal{R})} \in \mathcal{M}_n(\llbracket 1;n \rrbracket)$;
      $\mathbf{Z} \leftarrow \mathbf{A}^{(\mathcal{R})} \cdot \mathbf{B}$;
      pour $k = 1$ **à** n **faire**
        pour $l = 1$ **à** n **faire**
          si $(\mathbf{W}_{k,l} < 0)$ **et** $(\mathbf{Z}_{k,l}$ *est un témoin de* $\mathbf{P}_{k,l})$ **alors** $\mathbf{W}_{k,l} \leftarrow \mathbf{Z}_{k,l}$;
  pour $i = 1$ **à** n **faire**
    pour $j = 1$ **à** n **faire**
      si $\mathbf{W}_{i,j} < 0$ **alors**
        pour $k = 1$ **à** n **faire**
          si $\mathbf{A}_{i,k}\mathbf{B}_{k,j} = 1$ **alors** $\mathbf{W}_{i,j} \leftarrow k$;
  retourner $\mathbf{W}$;

III Troisième partie

On se propose de construire, pour chaque paire de sommets $i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket$, une représentation efficace d'un plus court chemin de i à j.

Question 11 *Montrer qu'il existe des graphes $\mathcal{G}_n$ à n sommets tels qu'au moins $\frac{n^2}{25}$ paires de sommets sont à une distance supérieure ou égale à $\frac{n}{2}$ pour n "assez grand" :*

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathsf{Card}\left(\left\{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2 \mid \delta_{\mathcal{G}_n}[i\,;\,j] \geqslant \frac{n}{2}\right\}\right) \geqslant \frac{n^2}{25}.$$

En déduire une borne inférieure du temps de calcul d'une représentation explicite d'un plus court chemin pour toutes les paires d'un graphe.

Devoir maison 13 Une matrice $\mathbf{S}$ est une *matrice de routage pour un graphe $\mathcal{G}$* lorsque la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall\, i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket,\ \mathbf{S}_{i,j} \in \left\{ v \in \mathcal{V}_{\mathcal{G}}(i) \;\middle|\; v \in \Gamma_0 \in \underset{\Gamma \in \left(i \leadsto^*_{\mathcal{G}} j\right)}{\arg\min}\ \lambda_{\mathcal{G}}(\Gamma) \right\},$$

i.e. $\mathbf{S}_{i,j}$ est l'indice d'un voisin de i qui se trouve sur un plus court chemin de i à j.

1. *Écrire un algorithme qui prend en entrée la matrice de routage $\mathbf{S}$ et deux sommets $i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket$ de $\mathcal{G}$ et qui renvoie un plus court chemin de i à j.*

Soit $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}$ la matrice des distances sur $\mathcal{G}$. On définit trois matrices booléennes $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G},s)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{B})$ pour $s \in \{0, 1, 2\}$ par :

$$\forall\, i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket,\ \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G},s)}_{i,j} = 1 \overset{\text{def}}{\iff} \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}_{i,j} = s \mod [3].$$

Soit maintenant $\mathbf{W}^{(s)}$ une matrice témoin du produit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G},s)}$.

2. *En se servant de la question 4, montrer que l'on peut calculer une matrice de routage à partir de la matrice $\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G})}$ et des trois matrices $\left\{\mathbf{\Delta}^{(\mathcal{G},s)}\right\}_{s \in \{0,1,2\}}$.*

3. *En déduire un algorithme qui calcule une matrice de routage en effectuant en moyenne $\Theta(n^{2+\varepsilon} \log^2 n)$ opérations arithmétiques.*