Exercice 1 :

Soit E un ensemble avec un ordre partiel noté $\preccurlyeq$. On dit que $\preccurlyeq$ est un beau préordre (*well quasi-order*, ou wqo) si pour toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite infini croissante ; c'est-à-dire que $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite croissante d'indices $i_0 < i_1 < \cdots < i_n < \cdots$ telle que $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $x_{i_0} \preccurlyeq x_{i_1} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_{i_n} \preccurlyeq \cdots$.

1. Montrer que si l'ordre $\preccurlyeq$ est total, alors c'est un wqo si et seulement si tout sous-ensemble non vide de E a un plus petit élément. (Déjà traitée au TD9)
2. Donner un exemple d'un ordre total qui n'est pas un wqo.
3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (1) L'ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ est un wqo.
   (2) Pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on peut trouver $i < j$ tels que $x_i \preccurlyeq x_j$.
   (3) (i) Il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante dans E,
   (ii) Il n'y a pas d'antichaine infini.
4. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble (partiellement) ordonné, on dit qu'il est bien fondé s'il n'y a de suite infinie décroissante. Supposons que E est dénombrable. Montrer que l'ordre est un wqo si et seulement si l'ensemble de toutes les antichaines est dénombrable.
5. Lemme de Dickson : Soit $(E_1, \preccurlyeq_1)$ et $(E_2, \preccurlyeq_2)$ deux wqo. Montrer que $(\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2)$ est un wqo pour $E_1 \times E_2$.
6. Lemme de Higman : Soit $\preccurlyeq$ un wqo sur Σ. On définit sur Σ^* la relation suivante :
$$a_1...a_m \leq_{sw} b_1b_2...b_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n \\ a_1 \preccurlyeq b_{i_1} \wedge a_2 \preccurlyeq b_{i_2} \cdots a_m \preccurlyeq b_{i_m} \end{cases}$$
   (a) Montrer que $\leq_{sw}$ est un ordre (*sw* pour *subword*).
   (b) Démontrer que $\leq_{sm}$ est un bel ordre.
7. Soit $\preccurlyeq$ un bel ordre sur E. Soit F une partie de E telle que : $\forall y \in E$, s'il existe $x \in F$ tel que $x \preccurlyeq y$, alors $y \in F$ (on dit que F est *fermée supérieurement*).
   (a) Démontrer que toute suite croissante de parties fermées supérieurement est stationnaire.
   (b) Démontrer que si F est une partie fermée supérieurement, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, ..., x_n$ dans F tels que $F = \cup_i \{y \in E, x_i \preccurlyeq y\}$.

Exercice 2 :

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute paire à une borne supérieure. Soit $f, g : E \to E$ telles que $g(x) := \sup(x, f(x))$. Montrer que si f est Scott continue, g l'est aussi.

Exercice 3 :

Soit $(E, \leq)$ un treillis complet et $f, g : E \to E$ telles que $g(x) = \sup\{f(y) | y \leq x\}$.

1. Alors g est la plus petite fonction qui soit croissante et supérieure à f.
2. Si f est progressive, alors g aussi et les points fixes de g sont aussi points fixes de f.

Exercice 4 :

Soit $(E, \leq)$ un treillis complet et $f, g : E \to E$ telles que $g(x) = \inf\{f(y) | x \leq y\}$.

1. Alors g est la plus grande fonction qui soit croissante et inférieure à f.

2. Si f est progressive, alors g aussi.

Exercice 5 (Théorème de Cantor-Bernstein (Pour année suivante : était déjà vu en Prog la même
Soit A et B deux ensembles et $f : A \to B$ et $g : B \to A$ deux injections. Soit H l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &\to \mathcal{P}(A) \\ X &\mapsto A \setminus g[B \setminus f[X]] \end{aligned}$$

1. En utilisant le théorème de Knaster-Tarski, montrer que H admet un point fixe.
2. En déduire que A et B sont équipotents.

Exercice 6 :
Soit $R \in \mathcal{P}(E \times E)$. Soit t l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E \times E) & \to & \mathcal{P}(E \times E) \\ Q & \mapsto & R \cup Q \cup Q^2 \end{cases}$$

où $Q^2 := \{(x, z) \in E \times E \mid \exists y \in E,\, xQy \wedge yQz\}$.
Montrer que t est continue au sens de Scott pour l'inclusion.

Exercice 7 :
Soit k un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{N}^k$ de la relation :

$$(x_1, ..., x_k) \leq (y_1, ..., y_k) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., k\}, x_i \leq y_i$$

1. Justifier que $\leq$ est un bel ordre sur $\mathbb{N}^k$.
2. On définit un système d'additions de vecteurs (SAV) sur $\mathbb{N}^k$ par la donnée d'un vecteur (dit marquage initial) $V_0 \in \mathbb{N}^k$ et d'un ensemble fini $\mathcal{T}$ de vecteurs dans $\mathbb{Z}^k$. Chaque élément de $\mathcal{T}$ définit une application partielle sur $\mathbb{N}^k$ notée $\xrightarrow{t}$: $V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$, pour tous V, V' dans $\mathbb{N}^k$ et t dans $\mathcal{T}$ (remarquez que puisque $t \in \mathbb{Z}^k$, il se peut que $V + t \notin \mathbb{N}^k$ et dans ce cas V n'a pas d'image par t). On dit qu'un vecteur V est accessible à partir de V_0 s'il existe une suite finie $t_1, ..., t_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que $V_0 \xrightarrow{t_1} V_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} V_n = V$.
   (a) Soit U_1, U_2, V_1 dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U_1 \leq U_2$ et V_1 est accessible à partir de U_1. Démontrer qu'il existe V_2 dans $\mathbb{N}^k$ accessible à partir de U_2.
   (b) On suppose qu'il existe U, V dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U \leq V$ et V est accessible à partir de U. On suppose que sur la j-ème composante, $U_j < V_j$. Démontrer qu'il existe une suite croissante $U_0 = U \leq U_1 = V \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n \leq \cdots$ formée de vecteurs dans $\mathbb{N}^k$ accessibles à partir de U et tels que la suite des j-ème composantes $\{U_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   (c) On ajoute à $\mathbb{N}$ un plus grand élément noté ω : $\hat{N} = \mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$. On étend l'addition usuelle sur $\mathbb{N}$ à $\hat{N}$ en posant $n + \omega = \omega + n = \omega$, $\forall n \in \hat{N}$ et la multiplication usuelle en posant $n\omega = \omega n = \omega$ if $n \in \hat{N} \setminus \{0\}$ et 0 sinon. Ceci permet de prolonger l'application partielle $\xrightarrow{t}$ sur $\hat{N}^k$ par : $\xrightarrow{t}$: $V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$, pour tous V, V' dans $\hat{N}^k$.
   On construit un arbre, dit *arbre de couverture*, de la façon suivante :
   - La racine de l'arbre de couverture est un sommet s_0 étiqueté par le vecteur V_0.

- Si une branche de l'arbre $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$ est construite, et $t \in \mathcal{T}$ vérifie $V_n \xrightarrow{t} V_{n+1}$, on prolonge éventuellement la branche par V_{n+1} selon les règles suivantes :

R1 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \leq V_i$, on ne prolonge pas la branche par V_{n+1}.

R2 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \geq V_i$, on définit le vecteur $\bar{V_{n+1}} = V_i + \omega(V_{n+1} - V_i)$ (si sur la j-ème composante, $V_{n+1}(j) > V_I(j)$, on la remplace par ω). On ajoute le fils $(s, \bar{V_{n+1}})$ à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

R3 Si $\forall \leq n$, V_{n+1} et V_i ne sont pas comparables, on ajoute le fils (s, V_{n+1}) à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

Démontrer la terminaison de l'algorithme.

(d) Dans le cas $k = 3$, on considère le SAV défini par $V_0 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{T} = \{a = (1, 1, -1), b = (-1, 0, 1), c = (0, -1, 0)\}$. Justifier précisément pourquoi dans ce cas l'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est infini. Construire l'arbre de couverture dans le cas particulier.

(e) Démontrer que l'arbre de couverture approxime l'ensemble d'accessibilité du système d'additions de vecteurs $(V_0, \mathcal{T})$ de la façon suivante :

- $\forall V$ accessible à partir de V_0, il existe un sommet de l'arbre étiqueté par un vecteur W tel que $V \leq W$.
- L'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est fini si et seulement si l'arbre ne contient aucun vecteur possédant une composante ω.