Exercice 1 :
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute paire à une borne supérieure. Soit $f, g : E \to E$ telles que $g(x) := \sup(x, f(x))$. Montrer que si f est Scott continue, g l'est aussi.

Exercice 2 :
Soit $(E, \leq)$ un treillis complet et $f, g : E \to E$ telles que $g(x) = \sup\{f(y) | y \leq x\}$.

1. Alors g est la plus petite fonction qui soit croissante et supérieure à f.
2. Si f est progressive, alors g aussi et les points fixes de g sont aussi points fixes de f.

Exercice 3 :
Soit $(E, \leq)$ un treillis complet et $f, g : E \to E$ telles que $g(x) = \inf\{f(y) | x \leq y\}$.

1. Alors g est la plus grande fonction qui soit croissante et inférieure à f.
2. Si f est progressive, alors g aussi.

Exercice 4 :
Soit $R \in \mathcal{P}(E \times E)$. Soit t l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E \times E) & \to & \mathcal{P}(E \times E) \\ Q & \mapsto & R \cup Q \cup Q^2 \end{cases}$$

où $Q^2 := \{(x, z) \in E \times E \mid \exists y \in E,\ xQy \wedge yQz\}$.
Montrer que t est continue au sens de Scott pour l'inclusion.

Exercice 5 :
Soit k un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{N}^k$ de la relation :

$$(x_1, ..., x_k) \leq (y_1, ..., y_k) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, ..., k\}, x_i \leq y_i$$

1. Justifier que $\leq$ est un bel ordre sur $\mathbb{N}^k$.
2. On définit un système d'additions de vecteurs (SAV) sur $\mathbb{N}^k$ par la donnée d'un vecteur (dit marquage initial) $V_0 \in \mathbb{N}^k$ et d'un ensemble fini $\mathcal{T}$ de vecteurs dans $\mathbb{Z}^k$. Chaque élément de $\mathcal{T}$ définit une application partielle sur $\mathbb{N}^k$ notée $\xrightarrow{t}$: $V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$, pour tous V, V' dans $\mathbb{N}^k$ et t dans $\mathcal{T}$ (remarquez que puisque $t \in \mathbb{Z}^k$, il se peut que $V + t \notin \mathbb{N}^k$ et dans ce cas V n'a pas d'image par t). On dit qu'un vecteur V est accessible à partir de V_0 s'il existe une suite finie $t_1, ..., t_n$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telles que $V_0 \xrightarrow{t_1} V_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_n} V_n = V$.
   (a) Soit U_1, U_2, V_1 dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U_1 \leq U_2$ et V_1 est accessible à partir de U_1. Démontrer qu'il existe V_2 dans $\mathbb{N}^k$ accessible à partir de U_2.
   (b) On suppose qu'il existe U, V dans $\mathbb{N}^k$ tels que $U \leq V$ et V est accessible à partir de U. On suppose que sur la j-ème composante, $U_j < V_j$. Démontrer qu'il existe une suite croissante $U_0 = U \leq U_1 = V \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n \leq \cdots$ formée de vecteurs dans $\mathbb{N}^k$ accessibles à partir de U et tels que la suite des j-ème composantes $\{U_{i,j}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   (c) On ajoute à $\mathbb{N}$ un plus grand élément noté ω : $\hat{N} = \mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$. On étend l'addition usuelle sur $\mathbb{N}$ à $\hat{N}$ en posant $n + \omega = \omega + n = \omega$, $\forall n \in \hat{N}$ et la multiplication

usuelle en posant $n\omega = \omega n = \omega$ if $n \in \hat{N} \setminus \{0\}$ et 0 sinon. Ceci permet de prolonger l'application partielle $\xrightarrow{t}$ sur $\hat{N}^k$ par : $\xrightarrow{t}$: $V \xrightarrow{t} V'$ si $V' = V + t$, pour tous V, V' dans $\hat{N}^k$.

On construit un arbre, dit *arbre de couverture*, de la façon suivante :

- La racine de l'arbre de couverture est un sommet s_0 étiqueté par le vecteur V_0.
- Si une branche de l'arbre $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$ est construite, et $t \in \mathcal{T}$ vérifie $V_n \xrightarrow{t} V_{n+1}$, on prolonge éventuellement la branche par V_{n+1} selon les règles suivantes :

R1 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \leq V_i$, on ne prolonge pas la branche par V_{n+1}.

R2 Si $\exists i \leq n$ tel que $V_{n+1} \geq V_i$, on définit le vecteur $\bar{V}_{n+1} = V_i + \omega(V_{n+1} - V_i)$ (si sur la j-ème composante, $V_{n+1}(j) > V_I(j)$, on la remplace par ω). On ajoute le fils $(s, \bar{V}_{n+1})$ à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

R3 Si $\forall \leq n$, V_{n+1} et V_i ne sont pas comparables, on ajoute le fils (s, V_{n+1}) à $(s_0, V_0) \to (s_1, V_1) \to \cdots \to (s_n, V_n)$.

Démontrer la terminaison de l'algorithme.

(d) Dans le cas $k = 3$, on considère le SAV défini par $V_0 = (1, 0, 1)$ et $\mathcal{T} = \{a = (1, 1, -1), b = (-1, 0, 1), c = (0, -1, 0)\}$. Justifier précisément pourquoi dans ce cas l'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est infini. Construire l'arbre de couverture dans le cas particulier.

(e) Démontrer que l'arbre de couverture approxime l'ensemble d'accessibilité du système d'additions de vecteurs $(V_0, \mathcal{T})$ de la façon suivante :

- $\forall V$ accessible à partir de V_0, il existe un sommet de l'arbre étiqueté par un vecteur W tel que $V \leq W$.
- L'ensemble des vecteurs accessibles à partir de V_0 est fini si et seulement si l'arbre ne contient aucun vecteur possédant une composante ω.

Exercice 6 :

Pour toute relation binaire R on définit sa "clôture transitive à gauche".

$$\frac{xRy}{xR^g y} \qquad \frac{xR^g y \quad yRz}{xR^g z}$$

Montrer que $R^g = R^+$.

Exercice 7 :

Rappel : Dans le cours, les arbres finis et les forêts sont définis de la manière suivante :

- $A := [F]$
- $F := nil \quad | \quad A :: F$

1. Trouver une alternative pour éviter la récurrence mutuelle dans la définition des arbres, d'abord en utilisant les grammaires, puis avec des règles d'inférence.
2. Définir une traduction (fidèle) des arbres définis par récurrence mutuelle vers les arbres définis par la deuxième méthode.
3. Avec ces nouvelles définitions non mutuelles, définir des fonctions calculant le nombre de noeuds internes et la hauteur.

DM : (Coupures dans les ordres partiels) :

Soit E un ensemble et $\preceq$ un ordre partiel sur E. On notera $x \| y := \neg(x \preceq y) \wedge \neg(y \preceq x)$. Soit F une sous partie de E. On dit que F est fermée par le bas (resp. par le haut) si pour tout x et y dans E, si $y \in F$ et $x \preceq y$ (resp. $y \preceq x$), alors $x \in F$.

1. (a) Nommer deux parties fermées par le bas de E.
   (b) Que peut-on dire du complémentaire $E \setminus F$ d'une partie fermée par le bas F ?
   (c) Soient $(F_i)_i \in I$ une famille non-vide de sous-parties fermées par le bas. Que peut-on dire de leur intersection $A := \cap_{i \in I} F_i$? De leur union $B := \cup_{i \in I} F_i$?

   Pour tout $F \subseteq E$, soit $FB(F)$ l'intersection de toutes les sous-parties fermées par le bas incluant F, soit $L(F)$ l'ensemble des minorants de F, i.e. $L(F) := \{x \in E \mid \forall y \in F, x \preceq y\}$, et $U(F)$ l'ensemble des majorants de F.

2. (a) Les fonctions FB, L, U sont-elles croissantes pour l'inclusion ? Décroissantes ? Ni l'une ni l'autre ?
   (b) Soit $F \subseteq E$. Montrer que $FB(F)$ est la plus petite sous-partie fermée par le bas incluant F. Quelle propriété a $L(F)$?
3. (a) Soit $F \subseteq E$. Comparer $FB(F)$ et $L(F)$ pour l'inclusion.
   (b) Caractériser les F tels que $FB(F) = L(F)$.
4. (a) Comparer $FB(F)$ et $L(U(F))$ pour l'inclusion. Pour la suite, on définit $C(F) := L(U(F))$. (On appelle C l'opérateur de coupure.)
   (b) L'inclusion de la question précédente est-elle parfois/toujours/jamais stricte ? Calculer $C(\{x\})$.
5. (a) Pour l'inclusion, C est-elle croissante, décroissante, ni l'une ni l'autre ?
   (b) Soit $F \subseteq E$. Comparer $C(F)$ et $C \circ C(F)$ pour l'inclusion.
   (c) Soit $F \subseteq E$. Caractériser $C(F)$ parmi les $C(X)$, $X \subseteq E$.
   (d) Caractériser les $F \subseteq E$ tels que $F = C(F)$.