Exercice 1 :
Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événement on a

$$\mathrm{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{P}(A_n)$$

où la somme de droite peut diverger.

Exercice 2 :
Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.

1. Montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements croissante pour l'inclusion, la suite des $\mathrm{P}(A_n)$ converge et
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$
2. De même, montrer que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements décroissante pour l'inclusion, la suite des $\mathrm{P}(A_n)$ converge et
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$$

Exercice 3 :
Soit $\{B_1, \ldots, B_n\}$ une partition de Ω telle que pour tout i, $\mathrm{P}(G_i) > 0$. Montrer que pour tout évènement A on a

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\mathrm{P}(B_i)$$

Exercice 4 :
Une urne contient n boules noires, b boules blanches et r boules rouges. On tire deux boules sans remise. Quelle est la probabilité de l'évènement “la deuxième boule tirée est noire” ?

Exercice 5 :
Soit $\{B_1, \ldots, B_n\}$ une partition de Ω telle que $\mathrm{P}(B_i) > 0$ pour tout i. Alors pour tout évènement A tel que $\mathrm{P}(A) > 0$ on a

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\mathrm{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_j)\mathrm{P}(B_j)}$$

Exercice 6 :
Il existe des pièces normales (resp. biaisées) qui donnent pile avec une chance sur deux (resp. sur trois). On choisit une pièce dans un coffre, elle est biaisée avec probabilité x. On la lance et elle tombe sur face. Quelle est la probabilité qu'elle soit biaisée ?

Exercice 7 :
On considère deux dés à six faces, l'un est équilibré, l'autre est truqué. On note p_i la probabilité que le dé truqué tombe sur la face i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

1. Décrire l'espace de probabilité.
2. (a) Quelle est la probabilité de faire un double ?
   (b) Quelle est la probabilité que la somme des dés soit égale à 7 ?

Exercice 8 :
On lance trois dés équilibrés.

1. Quelle est la somme des trois dés la plus probable ?
2. Quelle est la moyenne de S ?

Exercice 9 :
On cherche à simuler la loi uniforme sur l'ensemble $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$ avec deux dés indépendants. On note U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Pour tout $1 \leq i \leq 6$, on pose $u_i = PU = i$, $v_i = PV = i$ et on suppose que $u_i > 0$ et $v_i > 0$.

1. Si U et V suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 6\}$, est-ce que $U + V$ suit la loi uniforme sur $\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$?
2. On note $S = U + V$ et on suppose que S suit la loi uniforme sur $\{2, 3, \ldots, 12\}$.
   (a) Montrer que $P(x) = Ex^S$ est un polynôme qu'on explicitera.
   (b) Démontrer que $Ex^S = Ex^U \cdot Ex^V$.
   (c) Conclure en ayant en tête le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 10 :
Soit $k, n \geq 1$ des entiers naturels non nuls. Soient $X_0, X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, k]\!]$.

1. Soit $S \subset [\![1, k]\!]$. Quelle est la probabilité de $(X_i \in S)$ en fonction de $|S|$?
2. Soit $z \in [\![1, k]\!]$. Calculer $P(X_1 \neq z, \cdots, X_n \neq z)$.
3. Calculer $P(X_0 \notin \{X_1, \cdots, X_n\})$ de deux manières pour en déduire une expression de $E(|\{X_1, \ldots, X_n\}|)$.
4. Déterminer la limite ou un équivalent de $E(|\{X_1, \ldots, X_n\}|)$ lorsque :
   (a) k est fixé et $n \to +\infty$,
   (b) n est fixé et $k \to +\infty$,
   (c) $n = k \to +\infty$.

Exercice 11 (Penney's game) :
Alice et Bob jouent à un jeu sur une séquence de jets d'une pièce. La pièce tombe sur pile (**P**) avec probabilité p et sur face (**F**) avec probabilité $1 - p$. La pièce est relancée jusqu'à ce que l'un des motifs suivants apparaisse : Si le motif **PPF** apparait, Alice gagne. Si le motif **PFF** apparait, c'est Bob qui gagne.

1. On représente une partie par un mot sur $\{P, F\}$. Dessiner un automate déterministe complet avec deux états puits A et B tels que le langage des mots arrivant sur l'état A (resp. B) correspond aux mots représentant les parties gagnantes d'Alice (resp. Bob).
2. En déduire une description informelle de l'espace de probabilité (on cherchera à décrire les évènements élémentaires).

3. Soit $\mathcal{S}_a$ le langage représentant l'ensemble des parties gagnantes pour Alice $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_b$ le langage représentant l'ensemble des parties gagnantes pour pour Bob, $\mathcal{S}_B$ et l'ensemble des mots finis qui ne comportent pas encore de gagnant N. Justifier :
   (a) $P(\mathcal{S}_a) + P(\mathcal{S}_b) = 1$.
   (b) $\mathcal{S}_a = NPPF$ et $\mathcal{S}_a F \sqcup \mathcal{S}_B = NPFF$.
   (c) $\{\epsilon\} \sqcup N\{P, F\} = \mathcal{S}_a \sqcup \mathcal{S}_b \sqcup N$.
4. Résoudre le système obtenu en remplaçant les relations ensemblistes par des relations probabilistes.
5. Pour quelle valeur de p le jeu est-il équitable ?

Variables aléatoires

Exercice 12 (Indépendance) :
Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes sur un même espace de probabilités à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de mêmes lois définies par :

$$P(U = -1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(U = 1) = \frac{2}{3}$$

Soit X et Y les variables aléatoires définies par : $X = U$ et $Y = UV$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire (X, Y) ?
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Les variables X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 13 (Min, Max et comparaison) :
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité de même loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(Y \geq X)$. Donner sa valeur pour $p = \frac{1}{2}$.
2. Calculer $P(Y = X)$. Donner sa valeur pour $p = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $P(Y > X) = P(X > Y)$.

On définit les variables aléatoires U et V par

$$U = \max(X, Y) \text{ et } V = \min(X, Y)$$

4. Pour tous $(u, v) \in \mathbb{N}$ Calculer $P(U \leq u, V \geq v)$.
5. Calculer les lois des variables aléatoires U et V.
6. On définit la variable aléatoire $W = U - V$. Déterminer la loi de W.

Exercice 14 :
Pour avoir son diplôme, un étudiant doit réussir les examens des N cours qui sont proposés, et obtenir ainsi les N unités de valeur correspondantes. On suppose que l'étudiant a une probabilité $p \in]0, 1[$ de réussir chacun des examens (toutes les tentatives sont supposées indépendantes). D'année en année, l'étudiant peut reporter les unités de valeurs obtenues, et il ne passe alors que les examens qu'il n'a pas réussis.

1. Pour $1 \leq i \leq N$, notons G_i le nombre d'essais nécessaires pour réussir l'examen du i-ième cours. Quelle est la loi de G_i ?
2. On note X_n le nombre total d'unités obtenues pendant les n premières années (si $X_n = N$, alors $X_m = N$ pour $m \geq n$). Quelle est la loi de X_n ?
3. On suppose que l'étudiant ne peut passer les examens qu'au plus pendant 5 ans.
   (a) Quelle est la probabilité que l'étudiant n'obtienne pas son diplôme ?
   (b) Combien d'examens l'étudiant passera-t-il en moyenne ?

Exercice 15 (Rumeur) :

Une information est transmise dans une population. Chaque individu transmet la bonne information avec probabilité p, la négation de l'information est transmise avec probabilité $1-p$. Soit p_n la probabilité que l'information soit correcte après n répétitions.

1. Calculer la valeur p_n en fonction de p et de n.
2. Calculer $\lim_n p_n$. Conclure.

Exercice 16 :

Nous allons considérer un jeu de dés avec 4 dés à 20 faces chacun. Ces dés sont supposés non truqués. À chaque lancer, un nombre de points est attribué :

- Si tous les dés ont un résultat différent le nombre de points est nul.
- S'il existe une paire, un triplet ou un carré du nombre a, le nombre de points est égal à a.
- S'il existe deux paires du nombre a et b ($a \neq b$), le nombre de points est égal à $a + b$.

1. Quel est l'espace de probabilité ? Quelle est la distribution de probabilité ?
2. Quelle est la probabilité de faire un score nul ?
3. Soit a entre 1 et 20. Déterminer la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
4. Soit X_a la variable aléatoire valant 1 si a apparait au moins deux fois dans les lancers et 0 sinon. Déterminer la loi suivie par X_a et exprimer le gain du jeu à l'aide de ces variables. Calculer l'espérance du gain.
5. Quelle est la probabilité de faire exactement 8 points ?
6. On autorise maintenant de relancer une fois entre 0 et 4 dés. Quelle est la meilleure stratégie après avoir obtenu $11 - 7 - 2 - 2$?
7. Quelle est la meilleure stratégie après avoir obtenu 4 nombre différents ?