TD7 – Combinatoire

Exercice 1 :

Preuves non faites en cours :

1. Montrer que $[n]$ a $n!$ permutations. ($[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$)
2. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i \in [\![1,mn+1]\!]}$ une suite d'entiers naturels. Montrer qu'il existe une sous-suite de taille $n+1$ qui est croissante ou une sous-suite de taille $m+1$ qui est décroissante.

Exercice 2 :

Démontrer par des arguments combinatoires les identités suivantes :

1. $\sum_{0 \leq 2i \leq n} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$ et $\sum_{0 \leq 2i+1 \leq n} \binom{n}{2i+1} = 2^{n-1}$.
2. $\sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} = n2^{n-1}$.
3. $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$, pour $0 \leq k \leq l \leq n$.
4. Soit m, n deux entiers naturels tels que $1 \leq m \leq n$.
$$\sum_{i=m}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{m} = 2^{n-m}\binom{n}{m}$$
5. Pour tout entier $n \geq 2$:
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$
6. Pour tout entier $n \geq 3$:
$$\sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} = n(n-1)(n-2)2^{n-3}$$

Exercice 3 :

Soit N un entier naturel non nul.

1. Soit $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des parties de cardinal 2 dans $[\![1, N]\!]$. En partitionnant judicieusement $\mathcal{E}_2$, retrouver l'égalité :
$$\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{2}$$
2. En partitionnant l'ensemble $[\![1, N]\!]^3$ selon la valeur maximale $\max(x, y, z)$ prise par le triplet (x, y, z), retrouver l'expression de $\sum_{j=1}^{N-1} j^2$ en fonction de N.

Exercice 4 :

Soit $n_1, \ldots, n_{12}$ une famille de 12 nombres entiers. Démontrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $n_i - n_j$ est un multiple de 11 (au moins deux d'entre eux ont une différence divisible par 11).

Exercice 5 :

Dans un groupe de six personnes, il existe un groupe de trois personnes qui se connaissent mutuellement ou un groupe de trois personnes qui ne se connaissent ni l'une ni l'autre.

Exercice 6 :
Prouver le cas $n = 3$ de la formule du crible :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Exercice 7 :
Un mot de passe est considéré comme *valide* s'il vérifie les conditions suivantes :

- Il est formé de 8 caractères pris parmi les 26 lettres (minuscules) de l'alphabet, les chiffres entre 0 et 9, et les 7 caractères spéciaux !, ?, %, #, @, &, $.
- Il comprend au moins une lettre de l'alphabet.
- Il comprend au moins un chiffre.
- Il comprend au moins un caractère spécial.

Déterminer le nombre de mots de passe valides.

Exercice 8 :
Soit m, n deux entiers naturels. On note $s(m, n)$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal m sur un ensemble de cardinal n.

1. Que valent $s(m, n)$ si $m < n$? Si $m = n$?
2. En utilisant la formule du crible, justifier l'égalité :

$$s(m,n) = n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m + \cdots + (-1)^n n$$

Exercice 9 :
(Théorème de Ramsey)

1. Montrer que $\forall (n_r, n_b) \in \mathbb{N}^2, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour toute coloration en 2 couleurs $\{r, b\}$ du graphe complet K_N d'ordre N, il existe une couleur $c \in \{r, b\}$ et un sous-graphe complet de K_N d'ordre n_c qui soit monochromatique de couleur c.
(le plus petit N vérifiant cette propriété est noté $R(n_r, n_b)$).
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour toute coloration en k couleurs du graphe complet K_N d'ordre N, il existe une couleur $c \in [\![1, k]\!]$ et un sous-graphe complet de K_N d'ordre n_c qui soit monochromatique de couleur c.
(le plus petit N vérifiant cette propriété est noté $R(n_1, \ldots, n_k)$).

Exercice 10 :
On a coloré des arcs sur un cercle de diamètre 1. La somme des longueurs des arcs colorés est $< \pi/2$. Démontrer qu'il existe un diamètre du cercle dont les deux extrémités ne sont pas colorées.

Exercice 11 :
Soit $n + 1$ nombres $m_1, ..., m_{n+1}$ choisis parmi les nombres entiers naturels $1, 2, ..., 2n$.
Montrer qu'il existe i, j, $1 \leq i \neq j \leq n + 1$ tels que m_i divise m_j.

Exercice 12 :

(Théorème de Ramsey infini)

1. Soit une suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n < x_{n+1}$ et $y_n < y_{n+1}$. Montrer qu'il existe soit une droite soit une fonction strictement croissante et strictement convexe ou concave passant par un nombre infini de points de la suite.
2. Soit E un ensemble infini de $\mathbb{N}^2$. Montrer qu'il existe soit une droite soit une fonction strictement croissante et strictement convexe ou concave passant par un nombre infini de points de E.