Combinatoire (Suite)

Exercice 1 :
Soit m, n deux entiers naturels. On note $s(m, n)$ le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal m sur un ensemble de cardinal n.

1. Que valent $s(m, n)$ si $m < n$? Si $m = n$?
2. En utilisant la formule du crible, justifier l'égalité :

$$s(m,n) = n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m + \cdots + (-1)^{n-1}n$$

Exercice 2 :
(Théorème de Ramsey)

1. Montrer que $\forall (n_r, n_b) \in \mathbb{N}^2, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour toute coloration en 2 couleurs $\{r, b\}$ du graphe complet K_N d'ordre N, il existe une couleur $c \in \{r, b\}$ et un sous-graphe complet de K_N d'ordre n_c qui soit monochromatique de couleur c.
   (le plus petit N vérifiant cette propriété est noté $R(n_r, n_b)$).
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour toute coloration en k couleurs du graphe complet K_N d'ordre N, il existe une couleur $c \in [\![1, k]\!]$ et un sous-graphe complet de K_N d'ordre n_c qui soit monochromatique de couleur c.
   (le plus petit N vérifiant cette propriété est noté $R(n_1, \ldots, n_k)$).

Exercice 3 :
On a coloré des arcs sur un cercle de diamètre 1. La somme des longueurs des arcs colorés est $< \pi/2$. Démontrer qu'il existe un diamètre du cercle dont les deux extrémités ne sont pas colorées.

Exercice 4 :
Soit $n + 1$ nombres $m_1, ..., m_{n+1}$ choisis parmi les nombres entiers naturels $1, 2, ..., 2n$.
Montrer qu'il existe i, j, $1 \leq i \neq j \leq n + 1$ tels que m_i divise m_j.

Exercice 5 :
(Théorème de Ramsey infini)

1. Soit une suite $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n < x_{n+1}$ et $y_n < y_{n+1}$. Montrer qu'il existe soit une droite soit une fonction strictement croissante et strictement convexe ou concave passant par un nombre infini de points de la suite.
2. Soit E un ensemble infini de $\mathbb{N}^2$. Montrer qu'il existe soit une droite soit une fonction strictement croissante et strictement convexe ou concave passant par un nombre infini de points de E.

Relations et ordres

Exercice 6 :
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, i_0, F)$ un automate déterministe complet, où Q représente l'ensemble des

états, Σ l'alphabet, δ la fonction de transitions, i_0 l'état initial et F l'ensemble des états finals. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur Q telle que :

- Pour tous états p et q de $\mathcal{A}$ tels que $p \sim q$, pour tout a dans Σ, $\delta(p, a) \sim \delta(q, a)$.
- Si $p \in F$, pour tout état q de $\mathcal{A}$ tel que $p \sim q$, q est dans F.

Pour tout état p, on note $C(p)$ sa classe d'équivalence.

1. (a) Démontrer qu'on définit un automate déterministe complet en posant :

$$\mathcal{A}_\sim = (Q/\sim, \Sigma, \delta_\sim, C(i_o), F/\sim)$$

où $Q/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$, $\delta_\sim(C(p), a) = C(\delta(p, a))$ (justifier que cela a un sens), et $F/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence des états de F.

   (b) Démontrer que $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_\sim)$.

2. On définit alors pour tout entier n la relation d'équivalence sur Q : pour tous états p et q de $\mathcal{A}$, $p \sim_n q$ si, pour tout mot w de longueur inférieure à n, $\delta(p, w) \in F$ si et seulement si $\delta(q, w) \in F$. Montrer que :
   (a) Pour tous états p et q de $\mathcal{A}$, $p \sim_{n+1} q \Rightarrow p \sim_n q$.
   (b) Il existe n tel que $\sim_{n+1} = \sim_n$.
3. En déduire un algorithme de calcul de l'automate minimal de $\mathcal{A}$.

Exercice 7 :

Soit $(R_i)_{i \in I}$ une famille de relations binaires sur un ensemble E. Soit $R = \cap_{i \in I} R_i$. Autrement dit, xRy ssi xR_iy pour tout $i \in I$.

Les propriétés suivantes sont-elles préservées par intersection ? (Non / Oui, dès que l'une des R_i a la propriété / Oui, si toutes les R_i ont la propriété.) Ne surtout pas hésiter à prouver ce qu'on affirme.

	non	oui, si UNE des R_i	oui, si TOUTES les R_i
réflexivité			
symétrie			
transitivité			
totalité			
irréflexivité			
antisymétrie			
asymétrie			
trichotomie			

Exercice 8 :

Soit E un ensemble avec un ordre partiel $\leq$. On rappelle qu'une *antichaine* est un sous-ensemble de E dont tous les éléments sont incomparables.

1. On considère $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit ($(a, b) \leq (x, y) \iff a \leq x \wedge b \leq y$).
   (a) Exhiber qu'une antichaine de cardinal n, pour tout $n > 1$.
   (b) Peut-on trouver une antichaine infini ?
2. (Récurrence bien fondée sur $\mathbb{N}^2$) Soit P un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$. En supposant que pour tout $t \in \mathbb{N}^2$, $\{u | u < t\} \subset P$ implique $t \in P$, montrer que $P = \mathbb{N}^2$.
3. Montrer que l'ensemble des mots Σ^* avec l'ordre de sous-mots ($w_1 < w_2$ ssi il existe $u, v \in \Sigma^*$ tels que $w_2 = uw_1v$), a une antichaine infinie.

Exercice 9 :

Soit E un ensemble avec un ordre partiel noté $\preccurlyeq$. On dit que $\preccurlyeq$ est un beau préordre (*well quasi-order*, ou wqo) si pour toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite infini croissante ; c'est-à-dire que $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite croissante d'indices $i_0 < i_1 < \cdots < i_n < \cdots$ telle que $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $x_{i_0} \preccurlyeq x_{i_1} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_{i_n} \preccurlyeq \cdots$.

1. Montrer que si l'ordre $\preccurlyeq$ est total, alors c'est un wqo si et seulement si tout sous-ensemble non vide de E a un plus petit élément.
2. Donner un exemple d'un ordre total qui n'est pas un wqo.
3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (1) L'ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ est un wqo.
   (2) Pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on peut trouver $i < j$ tels que $x_i \preccurlyeq x_j$.
   (3) (i) Il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante dans E,
   (ii) Il n'y a pas d'antichaine infini.
4. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble (partiellement) ordonné, on dit qu'il est bien fondé s'il n'y a de suite infinie décroissante. Supposons que E est dénombrable. Montrer que l'ordre est un wqo si et seulement si l'esemble de toutes les antichaines est dénombrable.
5. Lemme de Dickson : Soit $(E_1, \preccurlyeq_1)$ et $(E_2, \preccurlyeq_2)$ deux wqo. Montrer que $(\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2)$ est un wqo pour $E_1 \times E_2$.
6. Lemme de Higman : Soit $\preccurlyeq$ un wqo sur Σ. On définit sur Σ^* la relation suivante :

$$a_1 ... a_m \leq_{sw} b_1 b_2 ... b_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n \\ a_1 \preccurlyeq b_{i_1} \wedge a_2 \preccurlyeq b_{i_2} \cdots a_m \preccurlyeq b_{i_m} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\leq_{sw}$ est un ordre (*sw* pour *subword*).
   (b) Montrer que $\leq_{sw}$ est un wqo.
7. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble (partiellement) ordonné, et $F \subset E$ tel que pour tout $y \in E$, s'il existe $x \in F$ tel que $x \preccurlyeq y$, alors $y \in F$ (on dit que l'ensemble F est fermée par le haut).
   (a) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un wqo. Montrer que tout suite croissante d'ensembles fermée par le haut est stationnaire ; c'est-à-dire que étant donné $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots$, il existe i tel que pour tout $j > i$, $F_i = F_j$.
   (b) Montrer que si F est fermée par le haut, il existe une suite fini d'éléments $(x_i)_{i\leq n}$ dans F telle que $F = \cup_{i\leq n}\{y \in E, x_i \preccurlyeq y\}$.