Exercice 1 :

Soit $(R_i)_{i\in I}$ une famille de relations binaires sur un ensemble E. Soit $R = \cap_{i\in I} R_i$. Autrement dit, xRy ssi xR_iy pour tout $i \in I$.

Les propriétés suivantes sont-elles préservées par intersection ? (Non / Oui, dès que l'une des R_i a la propriété / Oui, si toutes les R_i ont la propriété.) Ne surtout pas hésiter à prouver ce qu'on affirme.

	non	oui, si UNE des R_i	oui, si TOUTES les R_i
réflexivité			
symétrie			
transitivité			
totalité			
irréflexivité			
antisymétrie			
asymétrie			
trichotomie			

Exercice 2 :

Montrer que le produit lexicographique d'ordres (totaux) est un ordre (total).

Exercice 3 :

Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est Scott-continue si et seulement si elle est continue à gauche et croissante.

Exercice 4 :

Soit E un ensemble avec un ordre partiel $\leq$. On rappelle qu'une *antichaine* est un sous-ensemble de E dont tous les éléments sont incomparables.

1. On considère $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit $((a, b) \leq (x, y) \iff a \leq x \wedge b \leq y)$.
   (a) Exhiber qu'une antichaine de cardinal n, pour tout $n > 1$.
   (b) Peut-on trouver une antichaine infini ?
2. (Récurrence bien fondée sur $\mathbb{N}^2$) Soit P un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$. En supposant que pour tout $t \in \mathbb{N}^2$, $\{u|u < t\} \subset P$ implique $t \in P$, montrer que $P = \mathbb{N}^2$.
3. Montrer que l'ensemble des mots Σ^* avec l'ordre de sous-mots ($w_1 < w_2$ ssi il existe $u, v \in \Sigma^*$ tels que $w_2 = uw_1v$), a une antichaine infinie.

Exercice 5 :

Soit E un ensemble avec un ordre partiel noté $\preccurlyeq$. On dit que $\preccurlyeq$ est un beau préordre (*well quasi-order*, ou wqo) si pour toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite infini croissante ; c'est-à-dire que $\forall (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite croissante d'indices $i_0 < i_1 < \cdots < i_n < \cdots$ telle que $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $x_{i_0} \preccurlyeq x_{i_1} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_{i_n} \preccurlyeq \cdots$.

1. Montrer que si l'ordre $\preccurlyeq$ est total, alors c'est un wqo si et seulement si tout sous-ensemble non vide de E a un plus petit élément.
2. Donner un exemple d'un ordre total qui n'est pas un wqo.
3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) L'ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ est un wqo.

(2) Pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on peut trouver $i < j$ tels que $x_i \preccurlyeq x_j$.

(3) (i) Il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante dans E,

(ii) Il n'y a pas d'antichaine infini.

4. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble (partiellement) ordonné, on dit qu'il est bien fondé s'il n'y a de suite infinie décroissante. Supposons que E est dénombrable. Montrer que l'ordre est un wqo si et seulement si l'ensemble de toutes les antichaines est dénombrable.
5. Lemme de Dickson : Soit $(E_1, \preccurlyeq_1)$ et $(E_2, \preccurlyeq_2)$ deux wqo. Montrer que $(\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2)$ est un wqo pour $E_1 \times E_2$.
6. Lemme de Higman : Soit $\preccurlyeq$ un wqo sur Σ. On définit sur Σ^* la relation suivante :

$$a_1...a_m \leq_{sw} b_1b_2...b_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n \\ a_1 \preccurlyeq b_{i_1} \wedge a_2 \preccurlyeq b_{i_2} \cdots a_m \preccurlyeq b_{i_m} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\leq_{sw}$ est un ordre (*sw* pour *subword*).

   (b) Démontrer que $\leq_{sm}$ est un bel ordre.
7. Soit $\preccurlyeq$ un bel ordre sur E. Soit F une partie de E telle que : $\forall y \in E$, s'il existe $x \in F$ tel que $x \preccurlyeq y$, alors $y \in F$ (on dit que F est *fermée supérieurement*).

   (a) Démontrer que toute suite croissante de parties fermées supérieurement est stationnaire.

   (b) Démontrer que si F est une partie fermée supérieurement, il existe un nombre fini d'éléments $x_1, ..., x_n$ dans F tels que $F = \cup_i \{y \in E, x_i \preccurlyeq y\}$.

Exercice 6 (Théorème de Dilworth) :

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini. Soit F une partie non vide de E. On note $\mathrm{Max}(F)$ l'ensemble de ses éléments maximaux.

1. Justifier que $\mathrm{Max}(F)$ est une partie non vide de E.
2. Justifier que $\mathrm{Max}(F)$ est une antichaine et qu'elle est maximale (au sens de l'inclusion) parmi les antichaines de F.

On se propose de démontrer par récurrence sur $|E|$ le **théorème de Dilworth** :

Soit k le maximum des cardinaux des antichaines dans E. Alors E est la réunion disjointe de k chaines.

3. Démontrer le résultat lorsque $k = 1$.
4. On suppose que $k > 1$. Soit $z \in \mathrm{Max}(E)$ et $F = E \setminus \{z\}$. Soit l le maximum des cardinaux des antichaines dans F ; on suppose que F est la réunion disjointe de chaines $C_1, ..., C_l$.

   (a) Donner un encadrement de k en fonction de l.

   (b) Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de E. Que peut-on dire de $\mathcal{C} \cap C_i$, pour i dans $[\![1, l]\!]$?

   (c) Soit i dans $[\![1, l]\!]$. On note D_i l'ensemble des éléments de C_i qui sont dans une antichaine de cardinal l dans F.

      i. Justifier que D_i est non vide.
      On note dans la suite y_i un élément maximal de D_i.

      ii. Démontrer que $\{y_1, ..., y_l\}$ est une antichaine de F.

      iii. On suppose que pour tout i, z n'est pas comparable à y_i. Conclure.

      iv. On suppose qu'il existe i tel que z est comparable avec y_i. Soit $C' = \{z\} \cup \{x \in C_i \mid x \leq y_i\}$. Démontrer que C' est une chaine et que $F \setminus C'$ ne contient pas d'antichaine de cardinal l. Conclure dans ce cas.