1 Axiomatique de la théorie des ensembles

Exercice 1 :

1. Montrer que l'inclusion est réflexive, antisymétrique et transitive.
2. Montrer que $\{a, b\} = \{b, a\}$.
3. Montrer que $(a, b) = (c, d)$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
4. Montrer que $(a, b, c) = (a', b', c')$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$ et $c = c'$.
5. Dans l'axiome de l'union $\forall a \exists b \forall c (c \in b \Leftrightarrow \exists d (c \in d \wedge d \in a))$, montrer que b est unique.
6. Montrer que $\cup \emptyset = \emptyset$.
7. Montrer que $a \cup b = b \cup a$.
8. Montrer que $(\cup a) \cup (\cup b) = \cup(a \cup b)$.
9. Montrer que $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{a, c, b\}$.
10. Montrer que si $a \neq \emptyset$ ou $b = \emptyset$, alors $a \subseteq b$ implique $\cap b \subseteq \cap a$. La réciproque est-elle vraie ?
11. Exhiber a et b tels que $(\cap a) \cap (\cap b) \neq \cap(a \cap b)$.
12. Exhiber a et b tels que $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$.

Exercice 2 :
Montrer que :

1. $x \in A$ si et seulement si $\{x\} \subseteq A$.
2. Si x est transitif, $x \cup \{x\}$ l'est également.
3. Si $x \cup \{x\} \subseteq x$, alors $x \in x$.

Exercice 3 :
Soit A un ensemble inductif et $B := \{x \in A \mid x \subseteq A\}$. Montrer que :

1. B est un ensemble.
2. B est inductif.
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ défini dans le cours est transitif.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

Exercice 4 :
Soit A un ensemble inductif et $C := \{x \in A \mid \mathrm{Trans}(x)\}$. Montrer que :

1. C est un ensemble.
2. C est inductif.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n est transitif.

Exercice 5 :
Soit A un ensemble inductif et $D := \{x \in A \mid \mathrm{Trans}(x) \wedge \neg(x \in x)\}$. Montrer que :

1. D est un ensemble.
2. D est inductif.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \notin n$ et $\mathrm{succ}(n) := n \cup \{n\} \neq n$.

Exercice 6 :

1. Soit x un ensemble. Écrire une formule « tout ensemble y non vide et inclus dans x a un élément minimal pour la relation d'appartenance $\in$ ».
2. Soit A un ensemble inductif et $E := \{x \in A \mid \mathrm{Trans}(x) \wedge \phi(x)\}$. Montrer que E est un ensemble inductif.
3. Montrer que tout $X \subseteq \mathbb{N}$ non vide a un élément $\in$-minimal.

Exercice 7 :
Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\emptyset \in A$ et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \in A$ alors $\mathrm{succ}(n) \in A$. Montrer que $A = \mathbb{N}$.

Exercice 8 :
Soit A un ensemble inductif et $F := \{x \in A \mid x = \emptyset \vee \exists y \in A(x = y \cup \{y\})\}$. Montrer que :

1. F est un ensemble inductif.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $n = \emptyset = 0$ ou il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m \cup \{m\} = \mathrm{succ}(m)$.

Exercice 9 :
On a montré en cours que la collection des ensembles n'était pas un ensemble : $\neg\exists e \forall x(x \in e)$. La collection des singletons est-elle un ensemble ? (La réponse me prend quatre lignes)

2 Ensembles ordonnés

Exercice 10 :

1. Montrer qu'un bon ordre est total.
2. Montrer que la réciproque d'un isomorphisme d'ordre est un isomorphisme d'ordre.
3. Montrer que, dans un bon ordre $(E, <_E)$, un ensemble fermé inférieurement est soit un segment initial, soit l'ensemble tout entier.
4. Le résultat précédent est-il vrai si l'on retire l'hypothèse de bon ordre ?
5. Montrer qu'un bon ordre E n'est isomorphe à aucun de ses segments initiaux.
6. Le résultat précédent est-il vrai si l'on retire l'hypothèse de bon ordre ?

Exercice 11 :
Soient A, B des bons ordres.

1. Caractériser les automorphismes de B.
2. Combien peut-on avoir d'isomorphismes de A dans B ?

Exercice 12 :
Un ensemble F est dit clos par le bas ssi il est fermé inférieurement. Un ensemble U est dit clos par le haut ssi il est fermé supérieurement.

1. Montrer que les complémentaires de clos par le haut sont exactement les clos par le bas.
2. Montrer que les clos par le haut forment une topologie sur E.
3. Caractériser les fermés de cette topologie.
4. Caractériser les fonctions continues pour cette topologie.
5. Caractériser l'adhérence et l'intérieur pour cette topologie.

Exercice 13 :
On dit qu'un ensemble ordonné E est un treillis ssi toute paire x, y d'éléments de E admet un sup noté $x \vee y$ et un inf noté $x \wedge y$.

1. Si E est un treillis, que dire de la structure algébrique $(E, \vee, \wedge)$?
2. Montrer qu'un ensemble totalement ordonné est un treillis.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14 :
On dit qu'un ensemble ordonné E est un treillis complet ssi toute partie A de E admet une borne sup. Soit E un treillis complet.

1. Montrer que toute partie de E admet un inf.
2. **Théorème de Tarski.** Soit $f : E \to E$ croissante. Montrer que f admet un point fixe. On pourra pour cela considérer $A = \{x \in E \mid f(x) \leqslant x\}$.
3. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer qu'elle admet un point fixe.
4. BONUS : soient A, B des ensembles s'injectant l'un dans l'autre. Montrer que A et B sont en bijection.

3 Ordinaux

Exercice 15 :

1. Soit α un ordinal. Définir, par récursion transfinie sur β, l'addition à droite $\beta \mapsto \alpha + \beta$.
2. Simplifier $1 + \omega$ et $(\omega + 1) + (\omega + 1)$.
3. L'addition admet-elle un neutre ?
4. Est-elle associative ?

5. Est-elle commutative ?
6. Tout élément est-il inversible pour l'addition ? Simplifiable à gauche ? A droite ?
7. L'addition est-elle croissante à gauche ? Strictement ? Et à droite ?

Exercice 16 :

1. Soit α un ordinal. Définir, par récursion transfinie sur β, la multiplication à droite $\beta \mapsto \alpha \times \beta$.
2. Simplifier $2 \times \omega$, $\omega + \omega$, $(\omega + 1) \times (\omega + 1)$, $(\omega^2 + \omega + 1)^2$.
3. La multiplication admet-elle un neutre ?
4. Est-elle associative ?
5. Est-elle commutative ?
6. Est-elle distributive à gauche par rapport à l'addition ? A droite ?
7. Tout élément est-il inversible pour la multiplication ? Simplifiable à gauche ? A droite ?
8. La multiplication est-elle croissante à gauche ? Strictement ? Et à droite ?

Exercice 17 :

1. Soit α un ordinal. Définir, par récursion transfinie sur β, l'exponentiation $\beta \mapsto \alpha^\beta$.
2. Simplifier 2^ω, $(\omega + 1)^\omega$ et $(\omega^2)^\omega$.
3. Quelles sont les propriétés opératoires de l'exponentiation ?
4. Construire un ordinal ε tel que $\omega^\varepsilon = \varepsilon$.

Exercice 18 :

Soient α, β, λ des ordinaux.

1. Montrer que λ est limite ssi $\sup(\lambda) = \lambda$ ssi $\forall x \in \lambda, x^+ \in \lambda$.
2. Montrer que $\alpha + \beta$ est limite ssi β est limite non nul ou (α est limite et $\beta = 0$).
3. Montrer que $\alpha \times \beta$ est limite ssi α est limite ou β est limite.
4. Quid du caractère limite de α^β ?

Exercice 19 :

1. Soient α, β des ordinaux tels que $\beta \leqslant \alpha$. Montrer qu'il existe un unique ordinal γ tel que $\beta + \gamma = \alpha$. On note cet ordinal $\alpha - \beta$.
2. La propriété précédente reste-t-elle vraie si on demande $\gamma + \beta = \alpha$?
3. Calculer, pour α, β ordinaux, $\alpha - 0$, $\alpha - \alpha$ et $(\alpha + \beta) - \alpha$.
4. A-t-on $\forall \alpha, \beta, (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$?

Exercice 20 :

Soient α, β des ordinaux avec β non nul.

1. Division euclidienne : montrer qu'il existe un unique couple (q, r) d'ordinaux tel que $\alpha = \beta q + r$ et $r < \beta$.
2. Forme normale de Cantor : montrer qu'il existe une unique suite finie $(\beta_1, ..., \beta_n)$ décroissante d'ordinaux telle que $\alpha = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + ... + \omega^{\beta_n}$.

Exercice 21 :

Pour chacun des bons ordres suivants, donner l'unique ordinal isomorphe à l'ordre considéré. Pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$, l'ordre considéré est l'ordre $\geqslant$. Les notations α, β désignent des ordinaux.

- $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$
- $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cup \{0\}$
- $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*} \cup \{1 + \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$
- $\{\frac{1}{n} - k\}_{n,k\in\mathbb{N}^*}$
- $\mathbb{N}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}$) muni de l'ordre lexicographique
- Définir un ordre sur $\alpha \sqcup \beta$ de sorte que l'ordinal associé à cet ordre soit $\alpha + \beta$.
- Définir un ordre sur $\alpha \times \beta$ (produit cartésien) de sorte que l'ordinal associé soit $\alpha \times \beta$ (ordinal).

Exercice 22 :

Soit b un entier supérieur à 2 et $n \in \mathbb{N}$. Pour obtenir l'écriture héréditaire de n en base b, on écrit tout d'abord n en base b : $n = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k b^k$ puis on itère en écrivant les exposants $0, 1, ..., p$ de manière héréditaire en base b jusqu'à obtenir une expression où tous les nombres considérés sont inférieurs à b.
Par exemple, l'écriture héréditaire de 131 en base 2 est $131 = 2^{2^2+2+1} + 2 + 1$ et son écriture héréditaire en base 3 est $131 = 3^{3+1} + 3^3 + 3^2 \times 2 + 3 + 1 \times 2$.

Si n est un entier, on définit la suite de Goodstein $G(n)$ de n récursivement par :

- $G_2(m) = m$;
- Si $G_k(m) = 0$ alors la suite s'arrête ;
- Sinon, $G_{k+1}(m)$ est obtenu en prenant l'écriture héréditaire de $G_k(m)$ en base k, en remplaçant toutes les occurrences de k par $k + 1$ et en soustrayant 1.

1. Donner l'écriture héréditaire de 789 en base 2 et 3.
2. Calculer $G(n)$ pour $n \leqslant 3$.
3. Calculer les premiers termes de $G(4)$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G(n)$ est finie.

Exercice 23 :

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.
On dit que $C \subset E$ est une chaîne ssi $(C, \leqslant)$ est total, ie ssi les éléments de C sont 2 à 2 comparables.
L'ensemble E est dit inductif ssi toute chaîne C admet une borne sup.
Si E est inductif et $f : E \to E$, on dit que f est Scott-continue ssi f est croissante et préserve les sup de chaînes : pour toute chaîne C, $f(\sup(C)) = \sup(f(C))$.

1. Montrer que $(\mathbb{N}, |)$ et $(\mathcal{P}(E), \subset)$ sont des ensembles inductifs.
2. Caractériser les ordinaux inductifs.
3. Justifier que la notion de Scott-continuité est bien définie.
4. Parmi les fonctions suivantes sur les ordinaux, lesquelles sont Scott-continues ?
   - $\alpha \mapsto 1 + \alpha$
   - $\alpha \mapsto \alpha + 1$
   - $\alpha \mapsto \alpha - 1$
5. **Théorème de Scott, version faible.** Soit f une fonction Scott-continue de E inductif. Montrer que f admet un point fixe.
6. Montrer qu'il existe un ordinal ε tel que $\omega^\varepsilon = \varepsilon$.
7. On suppose de plus que E est un bon ordre et f une fonction Scott-continue de E. Montrer que, pour tout $x \in E$, f admet un point fixe supérieur à x.
8. Le résultat reste-t-il vrai si l'on retire l'hypothèse de bon ordre ?
9. Construire, des ordinaux ε_α pour tout α ordinal, de sorte que :
   - $\forall \alpha, \omega^{\varepsilon_\alpha} = \varepsilon_\alpha$;
   - $\forall \beta, \left(\omega^\beta = \beta \Rightarrow \exists \alpha, \beta = \varepsilon_\alpha\right)$;
   - $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$ est strictement croissante.
10. Montrer qu'il existe un ordinal ζ tel que $\zeta = \varepsilon_\zeta$. Quelles portes ouvrent cette question ?

4 Cardinaux

Exercice 24 :

On dit qu'un ensemble ordonné E est un treillis complet ssi toute partie A de E admet une borne sup. Soit E un treillis complet.

1. Montrer que $(\mathbb{N}, |)$ et $(\mathcal{P}(E), \subset)$ sont des treillis complets.
2. Montrer que toute partie de E admet un inf.
3. **Théorème de Tarski.** Soient E un treillis complet et $f : E \to E$ croissante. Montrer que f admet un point fixe. *Indication*[1]
4. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer qu'elle admet un point fixe.
5. **Théorème de Cantor-Bernstein.** Soient A, B des ensembles s'injectant l'un dans l'autre. Montrer que A et B sont en bijection. *Indication*[2]

1. On pourra pour cela considérer $A = \{x \in E \mid f(x) \leqslant x\}$.

2. En appelant ces injections f et g, considérer la fonction $\Phi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(A) \\ X & \mapsto & A \setminus g(B \setminus f(X)) \end{cases}$ (on pourra commencer par faire un dessin représentant Φ)

Exercice 25 :

Soient κ, κ' des cardinaux infinis. Montrer que $\kappa +_k \kappa' = \max(\kappa, \kappa')$ et que $\kappa \times_k \kappa' = \max(\kappa, \kappa')$

Exercice 26 :

1. Montrer que 2 ordinaux sont équipotents ssi ils ont même cardinal.
2. Montrer que 2 cardinaux différents ne sont pas équipotents.
3. Montrer que si $\alpha \leqslant \beta$ alors $|\alpha| \leqslant |\beta|$.
4. Quelles sont les propriétés algébriques de l'addition et de la multiplication cardinales ?
5. Montrer que l'addition et la multiplications de cardinaux sont croissantes. Le sont-elles strictement ?

Exercice 27 :

Soient α, β des cardinaux. On note α^β le cardinal de l'ensembles des fonctions de β dans α, si ce cardinal existe. Soit κ un cardinal tels que les cardinaux 2^κ et κ^κ existent.

1. Justifier la précaution « si ce cardinal existe » .
2. Montrer que $\kappa < 2^\kappa$.
3. Montrer que si κ est infini alors $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

Exercice 28 :

On note $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$ et c le cardinal de $\mathbb{R}$ (appelée la puissance du continu). Donner le cardinal des ensembles suivants :

1. $\mathbb{N}^*$
2. $2\mathbb{N}$
3. $\mathbb{Z}$
4. $\mathbb{N}^k$
5. $\mathbb{Q}$
6. I, où I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$
7. $2^{\mathbb{N}}$
8. $\mathbb{C}$
9. l'ensemble des nombres transcendants
10. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
11. l'ensemble des suites réelles
12. l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
13. l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle

14. BONUS : quel est le cardinal de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$? de la tribu borélienne étendue ?

Exercice 29 :

Soit E un espace vectoriel de dimension α sur un corps $\mathbb{K}$ de cardinal κ. Quel est le cardinal de E ?

Exercice 30 :

Montrer qu'il existe une infinité de cardinaux α tels que $\alpha = \aleph_\alpha$.

5 Axiome du choix

Exercice 31 :

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \setminus \{\varnothing\}$ admettent une fonction de choix.

Exercice 32 :

On se place dans ZF. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. tout ensemble E tel que $\varnothing \notin E$ admet une fonction de choix ;
2. pour tout ensemble A, $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ admet une fonction de choix ;
3. pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$ telle que $\forall i \in I, a_i \neq \varnothing$, on a $\prod\limits_{i \in I} a_i \neq \varnothing$.

Exercice 33 :

On se place dans ZF. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Axiome du choix : tout ensemble E tel que $\varnothing \notin E$ admet une fonction de choix ;
2. Théorème de Zermelo : tout ensemble admet un bon ordre ;
3. Lemme de Zorn : tout ensemble inductif (ie tel que toute chaîne admet un sup) admet un élément maximal ;
4. Trichotomie : pour tout A, B, A s'injecte dans B ou B s'injecte dans A.

Exercice 34 :

On suppose l'axiome du choix. On dit que E est dénombrable ssi E est en bijection avec $\mathbb{N}$.

1. Montrer que si E est infini alors $\mathbb{N}$ s'injecte dans E.
2. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Soit A infini et B au plus dénombrable. Montrer que A et $A \cup B$ sont équipotents.

Exercice 35 :

Soient A, B des ensembles. Montrer qu'il existe une injection de A dans B ssi il existe une surjection de B dans A.
L'un des deux sens de l'implication nécessite l'axiome du choix et, l'autre, d'ajouter une très légère hypothèse supplémentaire.

Exercice 36 :

Soit E un ensemble ordonné. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. toute partie non vide de E admet un élément minimal ;
2. il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante à valeurs dans E ;
3. Pour toute proposition φ telle que $\forall y \in E, (\forall x < y, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y))$, on a $\forall y \in E, \varphi(y)$.

Quelles implications nécessitent l'axiome du choix ?

Exercice 37 :

On suppose l'axiome du choix. Montrer que :

1. tout ordre se prolonge en un ordre total ;
2. tout ensemble admet un cardinal ;
3. tout espace vectoriel admet une base.
4. toute relation d'équivalence admet une famille de représentants ;
5. tout idéal propre I d'un anneau commutatif A est inclus dans un idéal maximal.

Exercice 38 :

On suppose l'axiome du choix. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue en a ssi $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.
2. On suppose f croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 39 :

Montrer que l'identité de $\mathbb{R}$ est somme de 2 fonctions périodiques

Exercice 40 :

Une infinité dénombrable de super-hippos se retrouve condamnée à mort. Ceux-ci peuvent toutefois être sauvés s'ils arrivent à surmonter une terrible épreuve.

Le lendemain à l'aube, les hippos seront placés en file indienne, indicée par $\mathbb{N}$, chacun avec sur la tête un chapeau sur lequel est inscrit un nombre réel. L'hippo numéro 0 pourra voir les chapeaux de tous les autres hippos, sauf le sien. L'hippo numéro 1 pourra voir les chapeaux de tous les autres hippos, sauf le sien et celui de l'hippo numéro 0, etc. A midi pile, les hippos devront, tous en même temps, dire chacun un nombre réel. Si un hippo donne le nombre sur son chapeau, il sera libre de patauger dans sa mare jusqu'à la fin de ses jours, sinon, il sera exécuté.

Les hippos ont la nuit pour mettre au point une stratégie afin de sauver un maximum d'entre eux. Que faire pour minimiser les pertes ? **Indication**[3]

3. Relisez bien l'énoncé, il ne s'agit pas d'hippos ordinaires... Ce sont des super-hippos !