TD2 – Ensembles ordonnés

Margot Catinaud margot.catinaud@lmf.cnrs.fr

Exercice 1

1. Montrer qu'un bon ordre est total.
2. Montrer que la réciproque d'un isomorphisme d'ordre est un isomorphisme d'ordre.
3. Montrer que, dans un bon ordre $(E, <_E)$, un ensemble fermé inférieurement est soit un segment initial, soit l'ensemble tout entier.
4. Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on retire l'hypothèse de bon ordre ?
5. Montrer qu'un bon ordre E n'est isomorphe à aucun de ses segments initiaux.
6. Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on retire l'hypothèse de bon ordre ?

Exercice 2

Soient $(A, <_A)$ et $(B, <_B)$ deux ensembles bien ordonnés.

1. Caractériser les automorphismes de B.
2. Combien peut-on avoir d'isomorphismes de A dans B ?

Exercice 3 (Ensemble clôt par le bas, clôt par le haut)

Soit $(E, <)$ un ensemble ordonné.

- On dit qu'un sous-ensemble $F \subseteq E$ est *clôt par le bas dans* E lorsqu'il est fermé inférieurement.
- On dit qu'un sous-ensemble $U \subseteq E$ est *clôt par le haut dans* E lorsqu'il est fermé supérieurement.

1. Montrer que les complémentaires d'ensembles clôt par le haut sont exactement les clôt par le bas.
2. Montrer que les clôts par le haut forment une topologie sur E.
3. Caractériser les fermés de cette topologie.
4. Caractériser les fonctions continues pour cette topologie.
5. Caractériser l'adhérence et l'intérieur pour cette topologie.

Exercice 4 (Treillis)

On dit qu'un ensemble ordonné $(E, <)$ est un *treillis* lorsque, pour toute paire $(x, y) \in E^2$, (x, y) admet un sup, noté $x \vee y$, et un inf, noté $x \wedge y$, pour l'ordre $<$ sur E.

1. Si E est un treillis, que dire de la structure algébrique $(E, \vee, \wedge)$?
2. Montrer qu'un ensemble totalement ordonné est un treillis.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5 (Treillis complet)

On dit qu'un ensemble ordonné $(E, <)$ est un *treillis complet* lorsque toute partie $A \subseteq E$ admet une borne supérieure. Soit $(E, <)$ un treillis complet.

1. Montrer que toute partie de E admet une borne inférieure.
2. **(Théorème de Tarski)** Soit $f : E \longrightarrow E$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.
   Indice : On pourra pour cela considérer l'ensemble $A \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{x \in E \;\Big|\; f(x) \leqslant x\Big\}$.
3. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. Montrer qu'elle admet un point fixe.
4. **(Bonus – Théorème de Cantor-Bernstein)** Soient A et B deux ensembles s'injectant l'un dans l'autre. Montrer que A et B sont en bijection.