TD4 – Cardinaux

Margot Catinaud margot.catinaud@lmf.cnrs.fr

Exercice 1

Soient κ et κ' deux cardinaux infinis. Montrer que $\kappa +_k \kappa' = \max(\kappa, \kappa')$ et que $\kappa \times_k \kappa' = \max(\kappa, \kappa')$

Exercice 2

Soient α et β deux ordinaux.

1. Montrer que α et β sont équipotents si et seulement si $\mathsf{card}(\alpha) = \mathsf{card}(\beta)$.
2. Montrer que 2 cardinaux différents ne sont pas équipotents.
3. On suppose que $\alpha \leqslant \beta$. Montrer que $\mathsf{card}(\alpha) \leqslant \mathsf{card}(\beta)$.
4. Quelles sont les propriétés algébriques de l'addition et de la multiplication cardinales ?
5. Montrer que l'addition et la multiplications de cardinaux sont croissantes. Le sont-elles strictement ?

Exercice 3 (Autour du cardinal des fonctions)

Soient α et β deux cardinaux. On note α^β le cardinal de l'ensemble des fonctions de β dans α, si ce cardinal existe. Soit κ un cardinal tel que les cardinaux 2^κ et κ^κ existent.

1. Montrer que $\kappa < 2^\kappa$.
2. On suppose que κ est infini. Montrer que $2^\kappa = \kappa^\kappa$.

Exercice 4 (Calcul de cardinaux)

On note $\aleph_0$ le cardinal de $\mathbb{N}$ et $\mathfrak{c}$ le cardinal de $\mathbb{R}$ (appelée la puissance du continu). Donner le cardinal des ensembles suivants :

1. $\mathbb{N}^*$;
2. $2\mathbb{N}$;
3. $\mathbb{Z}$;
4. $\mathbb{N}^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$;
5. $\mathbb{Q}$;
6. I, où I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$;
7. $2^{\mathbb{N}}$;
8. $\mathbb{C}$;
9. L'ensemble des nombres transcendants ;
10. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
11. L'ensemble des suites réelles ;
12. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
13. L'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle ;
14. **(Bonus)** Quel est le cardinal de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$? Et de la tribu de Lebesgue ?

Exercice 5 (Cardinal d'un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension α où le corps $\mathbb{K}$ est de cardinal κ. Quel est le cardinal de E ?

Exercice 6

Montrer qu'il existe une infinité de cardinaux α tels que $\alpha = \aleph_\alpha$.