TD7 – Relations et ordres

Margot Catinaud margot.catinaud@lmf.cnrs.fr

Exercice 1

Soit $(R_i)_{i\in I}$ une famille de relations binaires sur un ensemble E. On pose $R \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i\in I} R_i$:

$$\forall\, x, y \in E,\ xRy \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, i \in I,\ xR_iy.$$

Les propriétés suivantes sont-elles préservées par intersection ? (Non / Oui, dès que l'une des R_i a la propriété / Oui, si toutes les R_i ont la propriété) Toute affirmation devra être prouvée.

	non	oui, si UNE des R_i	oui, si TOUTES les R_i
réflexivité			
symétrie			
transitivité			
totalité			
irréflexivité			
antisymétrie			
asymétrie			
trichotomie			

Exercice 2

Soit E un ensemble avec un ordre partiel $\leqslant$. On rappelle qu'une *antichaine* $A \subset E$ est un sous-ensemble de E dont tous ses éléments sont incomparables :

$$\forall\, a, b \in A,\ a \neq b \implies \neg\big(a \leqslant b \vee b \leqslant a\big).$$

1. On considère $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit $((a, b) \preccurlyeq (x, y) \iff a \leqslant x \wedge b \leqslant y)$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, exhiber une antichaine de cardinal n.
   (b) Peut-on trouver une antichaine infinie ?
2. **(Récurrence bien fondée sur $\mathbb{N}^2$)** Soit P un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$. On suppose la propriété suivante :
$$\forall\, t \in \mathbb{N}^2,\ \Big[\big\{u \mid u \prec t\big\} \subset P\Big] \implies t \in P.$$
   Montrer que $P = \mathbb{N}^2$.
3. Montrer que l'ensemble des mots Σ^* avec l'ordre de sous-mots ($w_1 \propto w_2$ ssi il existe $u, v \in \Sigma^*$ tels que $w_2 = uw_1v$), possède une antichaine infinie.

Exercice 3

Soit E un ensemble avec un ordre partiel noté $\preccurlyeq$. On dit que $\preccurlyeq$ est un *beau préordre* (*well quasi-order*, ou *wqo*) lorsque pour toute suite d'éléments de E, on peut extraire une suite infinie croissante : il existe une fonction d'extraction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{\varphi(n)} \preccurlyeq x_{\varphi(n+1)}.$$

1. Dans cette question, on suppose que l'ordre $\preccurlyeq$ est total. Montrer que $\preccurlyeq$ est un *wqo* si et seulement si tout sous-ensemble non vide de E possède un plus petit élément.
2. Donner un exemple d'ordre total qui n'est pas un *wqo*.
3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) La relation d'ordre $\preccurlyeq$ est un *wqo* ;

   (b) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut trouver $n < m$ tels que $x_n \preccurlyeq x_m$;
   (c) (i) Il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante dans E, et
       (ii) Il n'y a pas d'antichaine infinie.
4. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble (partiellement) ordonné. On dit que E est *bien fondé* s'il n'y a de suite infinie décroissante. On suppose que E est bien fondé et au plus dénombrable. Montrer que l'ordre $\preccurlyeq$ est un *wqo* si et seulement si l'ensemble de toutes les antichaines est au plus dénombrable.
5. **Lemme de Dickson :** Soient $(E_1, \preccurlyeq_1)$ et $(E_2, \preccurlyeq_2)$ deux *wqo*. Montrer que $(\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2)$ est un *wqo* pour $E_1 \times E_2$.
6. **Lemme de Higman :** Soit $\preccurlyeq$ un *wqo* sur Σ. On définit sur Σ^* la relation suivante :

$$u_1...u_m \preccurlyeq_{sw} v_1v_2...v_n \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n,\ \forall j \in [\![1;m]\!],\ u_j \preccurlyeq v_{i_j}.$$

   De plus, on pose la convention suivante : pour tout mot $w \in \Sigma^*$, $\varepsilon \preccurlyeq_{sw} w$.
   (a) Montrer que $\preccurlyeq_{sw}$ est un ordre (*sw* pour *subword*).
   (b) Montrer que $\preccurlyeq_{sw}$ est un wqo.
7. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble (partiellement) ordonné, et $F \subset E$ une partie de E telle que pour tout $y \in E$, s'il existe $x \in F$ tel que $x \preccurlyeq y$, alors $y \in F$ (on dit que l'ensemble F est fermé par le haut).
   (a) Soit $(E, \preccurlyeq)$ un wqo. Montrer que tout suite croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles fermés par le haut est stationnaire : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $F_n = F_{n_0}$.
   (b) Montrer que si F est fermée par le haut, il existe une suite finie d'éléments $(x_i)_{i=0}^n$, où $n \in \mathbb{N}$, dans F telle que $F = \bigcup_{i=0}^{n} \{y \in E \mid x_i \preccurlyeq y\}$.

Exercice 4

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est Scott-continue si et seulement si elle est continue à gauche et croissante.

Exercice 5 (Théorème de Dilworth)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné fini. Soit F une partie non vide de E. On note $\mathsf{Max}(F)$ l'ensemble de ses éléments maximaux.

1. Justifier que $\mathsf{Max}(F)$ est une partie non vide de E.
2. Justifier que $\mathsf{Max}(F)$ est une antichaine maximale (au sens de l'inclusion).

On se propose de démontrer par récurrence sur $\mathrm{Card}(E)$ le théorème suivant :

Théorème 1 : Théorème de Dilworth

Soit k le maximum des cardinaux des antichaines dans E. Alors E est la réunion disjointe de k chaines.

3. Démontrer le résultat lorsque $k = 1$.
4. On suppose que $k > 1$. Soient $z \in \mathsf{Max}(E)$ et $F = E \setminus \{z\}$. Soit l le maximum des cardinaux des antichaines dans F. On suppose que F est la réunion disjointe de l chaines $(C_i)_{i=1}^l$.
   (a) Donner un encadrement de k en fonction de l.
   (b) Soit $\mathcal{C}$ une antichaine de E. Que peut-on dire de $\mathcal{C} \cap C_i$, pour tout $i \in [\![1;l]\!]$?
   (c) Soit $i \in [\![1;l]\!]$. On note D_i l'ensemble des éléments de C_i qui sont dans une antichaine de cardinal l dans F.
       (i) Justifier que D_i est non vide. On note dans la suite y_i un élément maximal de D_i.
       (ii) Démontrer que $\{y_j\}_{j=1}^l$ est une antichaine de F.
       (iii) On suppose que pour tout $j \in [\![1;l]\!]$, z n'est pas comparable à y_i. Conclure.
       (iv) On suppose qu'il existe $j_0 \in [\![1;l]\!]$ tel que z est comparable avec y_i. On pose C' l'ensemble définit par $C' \overset{\text{def}}{=} \{z\} \cup \left\{x \in C_i \;\middle|\; x \leqslant y_i\right\}$. Démontrer que C' est une chaine et que $F \setminus C'$ ne contient pas d'antichaine de cardinal l. Conclure dans ce cas.